

(1.A) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare e disegnare i vettori  $\mathbf{x}$ ,  $2\mathbf{x}$ ,  $-\mathbf{x}$ ,  $0\mathbf{x}$ .
- (ii) Calcolare e disegnare i vettori  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ,  $3\mathbf{y}$ ,  $-\mathbf{x}$  e  $3\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .
- (iii) Calcolare  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$ ,  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  e  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

(1.B) (*Trigonometria elementare*) Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$  un angolo. Il *seno* ed il *coseno* di  $\varphi$  sono, per definizione, le coordinate del vettore  $\mathbf{x}$  di norma  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , che forma un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse positive.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

- (i) Dimostrare che  $|\sin \varphi| \leq 1$  e  $|\cos \varphi| \leq 1$ .
- (ii) Dimostrare che  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .

(1.C) (*La regola del coseno*) Sia  $ABC$  un triangolo con lati di lunghezza  $a$ ,  $b$  e  $c$  ed angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Sia  $Q$  la proiezione ortogonale di  $C$  sul lato  $AB$ .

- (i) Far vedere che  $|CQ| = b \sin \alpha$  e  $|AQ| = b \cos \alpha$ .
- (ii) Applicare il Teorema di Pitagora al triangolo  $CQB$  e dedurre la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

(1.D) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare il coseno dell'angolo  $\varphi$  fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .
- (ii) Calcolare il coseno dell'angolo  $\varphi$  fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $-\mathbf{y}$ .
- (iii) Calcolare il coseno dell'angolo  $\varphi$  fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $-2\mathbf{y}$ .

(1.E) Sia  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Trovare un vettore  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  tale che l'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sia uguale a  $\pi/3$ .

(1.F) Trovare  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  non nulli tali che

- (i)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .
- (ii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 0$ .
- (iii)  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ .

(1.G) Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  e sia  $\mathbf{p}$  il vettore

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare la distanza  $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$  di  $\mathbf{p}$  da  $\mathbf{x}$  e la distanza  $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|$  di  $\mathbf{p}$  da  $\mathbf{y}$ .
- (ii) Calcolare la distanza  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Far vedere che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

- (iii) Dedurre che  $\mathbf{p}$  è il punto medio fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(1.H) Sia  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  e sia  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ .
- (ii) Dimostrare che

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi.$$

(1.I) Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  un vettore non nullo. Dimostrare che  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$  è un vettore di norma 1.

(2.A) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ .

- (i) Calcolare  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$  e  $-2\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .
  - (ii) Calcolare le lunghezze di questi vettori.
- (2.B) Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  i vettori dell'Eserc.2.A.
- (i) Calcolare i prodotti scalari  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  e anche  $\mathbf{x} \cdot (5\mathbf{x} + 7\mathbf{y})$ .
  - (ii) Calcolare il coseno dell'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .
  - (iii) Calcolare il coseno dell'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .
- (2.C) Sia  $\mathbf{x}$  il vettore dell'Eserc.2.A.
- (i) Trovare un vettore  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  tale che  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ .
  - (ii) Trovare un vettore  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  tale che

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0. \end{cases}$$

- (2.D) Sia  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$  un vettore non nullo. Sia  $\lambda = \|\mathbf{v}\|$ .
- (i) Calcolare la lunghezza di  $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$ .
  - (ii) Trovare un vettore parallelo a  $\mathbf{v}$  che abbia lunghezza  $1/\lambda$ .
- (2.E) Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori in  $\mathbf{R}^3$ . Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \\ (x_3 + y_3)/2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le distanze  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$  e  $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$ .
  - (ii) Far vedere che  $\mathbf{v}$  è il punto medio fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .
- (2.F) Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  i due vettori dell'Eserc.2.A.
- (i) Calcolare  $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .
  - (ii) Calcolare  $\mathbf{x} \times (-\mathbf{y})$ .
  - (iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(2.G) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare un vettore  $\mathbf{v}$  perpendicolare sia a  $\mathbf{x}$  che a  $\mathbf{y}$ .
  - (ii) Trovare un vettore come nella parte (i), di lunghezza 1.
- (2.H) Siano  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  i vettori in  $\mathbf{R}^3$  dati da

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare le lunghezze di  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  e i coseni degli angoli fra  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .
- (2.I) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
- (i) Calcolare i vettori  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}$  ed  $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ .
  - (ii) Calcolare  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$  ed  $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ .