Teorema (Desargues). *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli in $\mathbb{P}^2$ con i vertici sulle rette a, b, c uscenti da uno stesso punto S. Siano P, Q, R rispettivamente il punto di intersezione delle rette $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, il punto di intersezione delle rette $\overline{CB}$ e $\overline{C'B'}$ e il punto di intersezione delle rette $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. Allora i punti P, Q, R sono collineari.*

Dim. Consideriamo le proiettività

$$\pi_R : a \longrightarrow b, \qquad \pi_Q \circ \pi_P : a \longrightarrow c \longrightarrow b.$$

Si verifica facilmente che π_R e $\pi_Q \circ \pi_P$ coincidono sui tre punti distinti A, A', S. Si ha infatti

$$\pi_R(A) = \pi_Q \circ \pi_P(A) = B, \quad \pi_R(A') = \pi_Q \circ \pi_P(') = B', \quad \pi_R(S) = \pi_Q \circ \pi_P(S) = S.$$

Ne segue che π_R e $\pi_Q \circ \pi_P$ coincidono ovunque. Chiamiamo α, β e γ le intersezioni della retta $\overline{PQ}$ con le retta a, b, c. Per costruzione, i punti P, Q, a, b, c sono tutti collineari. Poiché

$$\pi_Q \circ \pi_P(\alpha) = \pi_R(\alpha) = \beta,$$

si ha che α β, R sono collineari. Di conseguenza anche P, Q, R sono collineari, come richiesto.
(vedi Fig. 1).

Vale anche il teorema di Desargues inverso.

Teorema (Desargues inverso). *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli in $\mathbb{P}^2$ i cui lati prolungati si incontrano in tre punti P, Q, R allineati su una retta s. Sia a la retta per A e A', sia c la retta per C e C' e sia b la retta per B e B'. Allore le rette a, b, c sono concorrenti, ossia hanno un punto di intersezione comune S.*

Illustriamo ora due applicazioni del Teorema di Desargues: la prima alla soluzione di un problema grafico, la seconda ad un problema di ricostruzione.

Problema 1. Date due rette l, m che si incontrano in un punto R (fuori dal foglio), e dato un punto Q, disegnare la retta per Q ed R, senza conoscere R.
(Vedi Fig. 2).

Soluzione. Il problema si risolve inserendo l, m e Q in una configurazione di Desargues, in modo che la retta cercata sia la retta individuata dai punti P, Q R ottenuti come intersezioni dei lati dei triangoli, etc...In questo modo, basta costruire P e la retta cercata è completamente determinata. Per costruire la configurazione di Desargues appropriata, disegnare due rette r, r' che si intersecano in Q (vedi Fig. 3). Siano B, B' i punti di intersezione di r ed r' rispettivamente con l ed m. Tracciare poi un retta B per B, B' e altre due rette a, c uscenti da uno stesso punto S. Siano C e C' i punti di intersezione $C = r \cap c$ e $C' = r' \cap c$; siano infine A e A' i punti di intersezione $A = l \cap a$ e $A' = m \cap A$. I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono triangoli che soddisfano le ipotesi del Teorema di Desargues e l'intersezione fra le rette $\overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ è proprio il punto P che serve ad individuare la retta $\overline{QR}$.

Problema 2. Siano a, b, c tre rette uscenti da uno stesso punto S e siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli "in prospettiva", coi vertici sulle rette a, b, c. Sia D' un punto su una retta d, anch'essa uscente da S. Qual è il punto D che si proietta sul punto D'?
(Vedi Fig. 3).

Soluzione. Il teorema di Desargues applicato ai triangoli $A'B'C'$ e ABC individua una retta r che contiene le intersezioni dei lati

$$R = \overline{A'B'} \cap \overline{AB}, \quad P = \overline{A'C'} \cap \overline{AC}, \quad Q = \overline{B'C'} \cap \overline{BC}.$$

Consideriamo adesso i triangoli

$$A'B'D' \qquad \text{e} \qquad D'C'A',$$

con i vertici rispettivamente sulle rette a,b,d e d,c,a e con il lato $\overline{A'D'}$ in comune. Se D è un punto che si proietta su D', si deve trovare sulla retta d e a partire da esso possiamo formare i triangoli ABD e DCA, anch'essi con i vertici sulle rette a,b,d e d,c,a e con il lato AD in comune. Facciamo vedere che D è univocamente determinato. Il teorema di Desargues applicato ai triangoli $A'B'D'$ e ABD individua una retta α che incontra r nel punto R; il teorema di Desargues applicato ai triangoli $D'C'A'$ e DCA individua una retta β che incontra r nel punto P. Allo stesso tempo l'intersezione dei lati $\overline{A'D'}$ e $\overline{AD}$ è un punto collineare sia a P che a R. Ne segue che le tre "rette di Desargues" coincidono

$$\alpha = \beta = r.$$

A questo punto siamo in grado di ricostruire D. Sia $T = \overline{D'C'} \cap r$. Allora

$$D = d \cap \overline{TC}.$$

Teorema (Pappo). *Siano l_1, l_2 due rette in $\mathbb{P}^2$, siano A_1, A_2, A_3 tre punti distinti su l_1 e B_1, B_2, B_3 tre punti distinti su l_2. Consideriamo i punti di intersezione*

$$C_1 = \overline{A_1B_2} \cap \overline{A_2B_1}, \quad C_2 = \overline{A_1B_3} \cap \overline{A_3B_1}, \quad C_3 = \overline{A_2B_3} \cap \overline{A_3B_2}.$$

Allora C_1, C_2, C_3 sono collineari.

Dim. Introduciamo le rette ausiliarie

$$m = \overline{A_2B_1}, \qquad n = \overline{A_2B_3}, \qquad m \cap n = A_2$$

e consideriamo la composizione delle pospettività $\pi_{A_1}\colon m \longrightarrow l_2$ e $\pi_{A_3}\colon l_2 \longrightarrow n$

$$\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}\colon m \longrightarrow n.$$

Poiché $\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}(A_2) = \pi_{A_3}(l_1 \cap l_2) = A_2$, la proiettività $\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}$ fissa il punto di intersezione $m \cap n$ ed è essa stessa una prospettività. Dimostriamo ora che

$$\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1} = \pi_{C_2}, \tag{$*$}$$

verificando che le due proiettività coincidono sui tre punti distinti

$$A_2, \qquad B_1, \qquad \gamma = \overline{A_1B_3} \cap \overline{A_2B_1}.$$

Abbiamo già verificato che $\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}(A_2) = \pi_{C_2}(A_2) = A_2$. Definiamo $\delta = \overline{B_1C_2} \cap n = \pi_{C_2}(B_1)$. Abbiamo poi

$$\pi_{A_3}(\pi_{A_1}(B_1)) = \pi_{A_3}(\overline{B_1A_1} \cap l_2) = \pi_{A_3}(B_1) = \overline{B_1A_3} \cap n = \delta.$$

Infine

$$\pi_{C_2}(\gamma) = \overline{C_2\gamma} \cap n = B_3 = \pi_{A_3}(\pi_{A_1}(\gamma)) = \pi_{A_3}(\overline{\gamma A_1} \cap l_2) = \pi_{A_3}(B_3) = \overline{B_3A_3} \cap n.$$

Calcolando l'immagine del punto C_1, troviamo

$$\pi_{C_2}(C_1) = \pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}(C_1) = \pi_{A_3}(\overline{B_1C_1} \cap l_2) = \pi_{A_3}(B_2) = \overline{B_2A_3} \cap n = C_3.$$

Di conseguenza, C_1, C_2, C_3 sono collineari come richiesto.
(Vedi Fig. 4).