Proposizione. *Siano l, m rette in $\mathbb{P}^2$. Sia $F\colon l \longrightarrow m$ una proiettività. Allora F è la composizione di due prospettività, ossia esistono α e α' in $\mathbb{P}^2$ tali che*

$$F = \pi_{\alpha'} \circ \pi_{\alpha}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo questo fatto costruendo due prospettività π_α e $\pi_{\alpha'}$ in modo che F e $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ coincidano su tre punti distinti. Poiché le immagini di tre punti distinti individuano completamente una proiettività, ciò è sufficiente per concludere che F coincide con $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ ovunque. Siano P, Q, R una terna di punti distinti su l e siano $F(P)$, $F(Q)$, $F(R)$ le loro immagini su m. Poiché una proiettività è biiettiva, anche $F(P)$, $F(Q)$, $F(R)$ sono punti distinti. Consideriamo le due coppie di rette

$$\overline{PF(Q)} \text{ e } \overline{QF(P)}, \qquad \overline{QF(R)} \text{ e } \overline{RF(Q)}.$$

Siano P_0 e Q_0 i rispettivi punti di intersezione e sia n la retta da essi individuata. Consideriamo adesso le prospettività $\pi_{F(Q)}\colon l \longrightarrow n$ e $\pi_Q\colon n \longrightarrow m$ e la loro composizione

$$\pi_Q \circ \pi_{F(Q)}\colon l \longrightarrow n \longrightarrow m.$$

Si verifica facilmente che

$$\pi_Q \circ \pi_{F(Q)}(P) = \pi_Q(P_0) = F(P), \qquad \pi_Q \circ \pi_{F(Q)} = F(Q),$$
$$\pi_Q \circ \pi_{F(Q)}(R) = \pi_Q(R_0) = F(R),$$

da cui la tesi.

La costruzione di F come composizione delle prospettività π_Q e $\pi_{F(Q)}(R)$ si chiama la *costruzione di Steiner*. (Vedi Figura 1).

Osservazione. . La composizione di due prospettività generalmente non è una prospettività: lo è se e solo se fissa il punto di intersezione $l \cap m$.

Esempio. 1. Siano P, Q, R, S punti distinti sulla retta proiettiva l. Costruiamo la proiettività $F\colon l \longrightarrow l$ che soddisfa le condizioni

$$F(P) = P, \quad F(Q) = R, \quad F(R) = S.$$

Introduciamo una retta ausiliaria m che interseca l nel punto P. Scegliamo un punto α esterno ad l ed m e consideriamo la prospettività di centro α

$$\pi_\alpha \colon l \longrightarrow m.$$

Siano $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$ e $R_0 = \pi_\alpha(R)$ le immagini dei punti Q ed R tramite π_α. Le rette

$$\overline{Q_0 R} \quad \text{e} \quad \overline{R_0 S}$$

sono distinte e si intersecano in un punto α' esterno ad l ed m. Come ogni prospettività, $\pi_{\alpha'}(P) = P$. Per costruzione

$$\pi_{\alpha'}(Q_0) = R \quad \text{e} \quad \pi_{\alpha'}(R_0) = S.$$

Ne segue che $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ coincide con F sui punti distinti P, Q, R e dunque coincide con F ovunque.
(Vedi Figura 2).

Esempio. 2. Siano P, Q, R, S punti distinti sulla retta proiettiva l. Costruiamo la proiettività $F \colon l \longrightarrow l$ che soddisfa le condizioni

$$F(P) = P, \quad F(Q) = Q, \quad F(R) = S.$$

Introduciamo una retta ausiliaria m che interseca l nel punto P. Scegliamo un punto α esterno ad l ed m e consideriamo la prospettività di centro α

$$\pi_\alpha \colon l \longrightarrow m.$$

Siano $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$ e $R_0 = \pi_\alpha(R)$ le immagini dei punti Q ed R tramite π_α. Le rette

$$\overline{Q_0 R} \quad \text{e} \quad \overline{R_0 S}$$

sono distinte e si interecano in un punto α' esterno ad l ed m. In questo caso, poiché $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha(Q) = Q$ il punto α' si trova necessariamente sulla retta passante per α, Q e Q_0. Come ogni prospettività, $\pi_{\alpha'}(P) = P$. Per costruzione

$$\pi_{\alpha'}(Q_0) = Q \quad \text{e} \quad \pi_{\alpha'}(R_0) = S.$$

Ne segue che $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ coincide con F sui punti distinti P, Q, R e dunque coincide con F ovunque.
(Vedi Figura 3).

Osservazione. . L'espressione di $F = \pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ come composizione di prospettività generalmente non è unica. Nelle costruzioni degli Esempi 1 e 2 sono state fatte diverse *scelte*:
è stata scelta la retta ausiliaria m ed è stato scelto il centro α della prima prospettività π_α. In ogni caso la proiettività che ne risulta coincide con F e può essere usata per determinare le immagini tramite F di altri punti:

$$F(X) = \pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha(X) = \pi_{\alpha'}(\pi_\alpha(X)), \qquad \text{per ogni } X \in l.$$