Forma canonica affine di una conica .

Come la riduzione in forma canonica metrica, la riduzione in forma canonica affine di una conica consiste nella ricerca di un sistema di riferimento rispetto al quale l'equazione che la definisce risulti "più semplice possibile". In questo caso, i cambiamenti di coordinate ammessi non sono necessariamente isometrie, ma trasformazioni affini

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove A è una matrice invertibile qualunque e $\mathbf{b}$ è un vettore. Ad esempio, si ammettono anche le *dilatazioni*.

Definizione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu > 0$. La dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ di $\mathbf{R}^2$ è l'applicazione $D_{\lambda,\mu} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda = \mu > 0$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ è semplicemente un "ingrandimento" di fattore $\lambda = \mu$. Se λ e μ sono numeri positivi distinti, $D_{\lambda,\mu}$ è un ingrandimento di fattore λ nella direzione dell'asse delle ascisse e di fattore μ nella direzione dell'asse delle ordinate.

Una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \mu > 0$ conserva sempre l'orientazione:

$$\begin{aligned} \mathrm{Or}(D_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu}(\mathbf{w})) &= \mathrm{Or}\left(\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \end{pmatrix}\right), \\ &= \lambda v_1 \mu w_2 - \lambda w_1 \mu v_2, \\ &= \lambda\mu \mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Tramite un'opportuna dilatazione, l'equazione di una conica può essere trasformata in una equazione i cui coefficienti sono uguali a $1, -1$ o 0, a seconda che i corrispondenti coefficienti nell'equazione canonica metrica sono positivi, negativi o nulli. Ad esempio, se una conica ha equazione canonica metrica

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0$$

dopo la dilatazione

$$x_1 = a x_1', \quad x_2 = b x_2'$$

ha equazione canonica affine

$$(x_1')^2 - (x_2')^2 = 1.$$

Oppure, se una conica ha equazione canonica metrica

$$\frac{x_1^2}{p} - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 - p x_2 = 0, \qquad p > 0$$

dopo la dilatazione

$$x_1 = \sqrt{p} x_1', \quad x_2 = x_2'$$

ha equazione canonica affine

$$(x_1')^2 - x_2' = 0.$$

L'equazione così ottenuta si chiama "equazione canonica affine" della conica.

Classificazione proiettiva delle coniche.

Definizione. Una conica in $\mathbf{P}^2$ è l'insieme dei punti $P = (x : y : z) \in \mathbf{P}^2$ che soddisfano un'equazione omogenea di secondo grado

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0, \tag{1}$$

dove $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$, non sono tutti nulli.

Osservazione. L'equazione (1) è ben definita in $\mathbf{P}^2$: essendo omogenea, ogni volta che è soddisfatta da $X = (x : y : z)$, è soddisfatta anche da $tX = (tx : ty : tz)$, per ogni $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Scriviamo l'equazione (1) nella forma

$${}^tXAX = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice A è simmetrica reale. Dunque A ha tutti gli autovalori reali ed è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè esiste una matrice M ortogonale (che soddisfa ${}^tMM = Id$) tale che

$$M^{-1}AM = {}^tMAM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo adesso la matrice

$$N = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & \lambda_i \neq 0 \\ 1, & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

Si ha che

$${}^t(MN)AMN = {}^tN{}^tMAMN = {}^tN({}^tMAM)N = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \lambda_i > 0 \\ -1, & \lambda_i < 0 \\ 0, & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

Mediante il cambiamento di coordinate in $\mathbf{R}^3$ dato da

$$X = NMX', \tag{2}$$

l'equazione (1) della conica diventa

$${}^tX'\ {}^t(MN)AMN\ X' = \varepsilon_1(x')^2 + \varepsilon_2(y')^2 + \varepsilon_3(z')^2 = 0, \quad \varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}.$$

Interpretiamo il cambiamento di coordinate (2) come un cambiamento di coordinate proiettivo. Otteniamo così la classificazione proiettiva delle coniche in $\mathbf{P}^2$:

Una conica in $\mathbf{P}^2$ è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti coniche:

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ (2) & x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ (3) & x^2 + y^2 = 0 \\ (4) & x^2 - y^2 = 0 \\ (5) & x^2 = 0. \end{array}$$

Si può dimostrare che le coniche (1)–(5) sono *a due a due proiettivamente non equivalenti.*

Una conica si dice *non-degenere* se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono tutti non nulli, altrimenti si dice degenere. Le coniche (1) e (2) sono non degeneri, le altre sono degeneri. La conica (2) coincide con l'insieme vuoto, la (3) consiste di un solo punto $(0:0:1)$, la (4) consiste di due rette distinte $(x:x:z) \cup (x:-x:z)$, la (5) di due rette coincidenti $(0:y:z) \cup (0:y:z)$. Consideriamo infine la conica (1)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

In $\mathbf{R}^3$, l'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ definisce il cono ottenuto ruotando intorno all'asse z (asse del cono) una retta (generatrice del cono) passante per l'origine (vertice del cono), inclinata di un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto ad esso. In $\mathbf{P}^2$, identificato con il piano esteso $z = 1$, l'equazione (1) diventa

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

e definisce un'ellisse. In $\mathbf{P}^2$, identificato con il piano esteso $x = 1$, l'equazione (1) diventa

$$z^2 - y^2 = 1,$$

e definisce un'iperbole. Infine in $\mathbf{P}^2$, identificato con il piano esteso $y - z = 1$, l'equazione (1) diventa

$$x^2 + 2y - 1 = 0,$$

e definisce una parabola. Questi tre casi equivalgono rispettivamente a tagliare il cono con un piano che interseca una sola falda del cono, con un piano che interseca entrambe le falde del cono, con un piano parallelo alla generatrice del cono. In altre parole, ellisse iperbole e parabola sono "tre facce" della stessa conica proiettiva e per questa ragione vengono anche chiamate *sezioni coniche.*