Il birapporto.

Sia r una retta proiettiva e siano A, B, C, D punti su r, con A, B, C distinti.

Definizione. Il birapporto della quaterna A, B, C, D è l'elemento di $\mathbb{R} \cup \infty$ dato da

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{vmatrix}} \tag{1}$$

dove $(a_0 : a_1)$, $(b_0 : b_1)$, $(c_0 : c_1)$, $(d_0 : d_1)$ sono rispettivamente le coordinate omogenee di A, B, C, D .
(qui si intende $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).

Esempio. Siano $A = (1 : 2)$, $B = (1 : -1)$, $C = (3 : 1)$, $D = (1 : 0)$.

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5(-1)}{(-4)2} = 5/8.$$

Esempio. Siano A, B, C punti distinti su una retta proiettiva.

$$(ABCA) = \infty, \qquad (ABCB) = 0, \qquad (ABCC) = 1.$$

Osservazione 1. Si vede facilmente che il birapporto di una quaterna di punti A, B, C, D dipende anche dal loro ordine. Le seguenti relazioni seguono direttamente dalla definizione e dalle proprietà del determinante:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

In questo modo, A, B, C, D danno origine ad un numero massimo di sei birapporti distinti, corrispondenti alle sei quaterne ordinate con A al primo posto. Fissato $(ABCD) = k$, tutti i possibili valori del birapporto sono

$$(ABCD) = k, \quad (ABDC) = 1/k, \quad (ACBD) = 1 - k,$$

$$(ADBC) = (k-1)/k, \quad (ADCB) = k/(k-1), \quad (ACDB)1/(1-k).$$

Osservazione 2. Fissati tre punti distinti A, B, C su una retta proiettiva r ed un valore k per il birapporto, esiste un unico punto $D \in r$ tale che $(ABCD) = k$.

Direttamente dalla definizione, troviamo $D = A$ per $k = \infty$ e troviamo $D = B$ per $k = 0$. Per $k \neq 0, \infty$, poniamo

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

nella definizione di (ABCD) (cf. (1)). Allora le coordinate omogenee del punto cercato $D = (d_0 : d_1)$ devono soddisfare l'equazione

$$\frac{x_0 b_1 - b_0 x_1}{x_0 a_1 - a_0 x_1} = \lambda^{-1} k$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha x_0 + \beta x_1 = 0, \quad \text{per} \quad \alpha = (b_1 - \lambda^{-1} k a_1), \quad \beta = (-b_0 + \lambda^{-1} k a_0).$$

Dunque il punto D ha coordinate omogenee $(\beta : -\alpha)$.

Il *birapporto* di una quaterna di punti è un invariante proiettivo:

Proposizione. *Sia $F\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ una proiettività. Allora F conserva il birapporto, ossia*

$$(F(A)F(B)F(C)F(D)) = (ABCD),$$

per ogni quaterna di punti A, B, C, D (con A, B, C distinti).

Dim. Sia M una matrice invertibile 2×2 che rappresenta F. Direttamente dalla definizione si vede che

$$(F(A)F(B)F(C)F(D)) = \frac{\left| M \cdot \begin{pmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix} \right| \left| M \cdot \begin{pmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix} \right|}{\left| M \cdot \begin{pmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} \right| \left| M \cdot \begin{pmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{pmatrix} \right|} = (ABCD).$$

Proposizione. *Date due quaterne di punti A, B, C, D (con A, B, C distinti) e A', B', C', D' (con A', B', C' distinti) esiste una una trasformazione proiettiva $F\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ che manda A, B, C, D rispettivamente in A', B', C', D' se e solo se $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Dim. Poichè il birapporto è invariante per trasformazioni proiettive, condizione necessaria affiché esista una trasformazione con le proprietà richieste è che $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Viceversa, supponiamo che $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Sappiamo anche che esiste un'unica trasformazione proiettiva F che manda A, B, C rispettivamente in A', B', C'. Poiché F preserva il birapporto si ha che

$$(A'B'C'D') = (A'B'C'F(D)) = (ABCD).$$

Dall'osservazione 2, segue che $D' = F(D)$.

Definizione. Una quaterna armonica è formata da quattro punti A, B, C, D (con A, B, C distinti) tali che $(ABCD) = -1$.

Esercizio. *(coppie di punti armonici)* Sia l una retta e siano A, B, C e D quattro punti su l. Supponiamo che il birapporto $(ABCD)$ sia uguale a -1. Dimostrare che i birapporti $(ABDC)$, $(BACD)$, $(BADC)$, $(CDAB)$, $(CDBA)$, $(DCAB)$ e $(DCBA)$ sono tutti uguali a -1. Di conseguenza la proprietà di "avere birapporto -1" dipende solo dalle due coppie A, B e C, D e non dall'ordine dei punti. Due coppie di punti A, B e C, D si dicono *armonici* se $(ABCD) = -1$.

Definizione. Un quadrangolo in $\mathbb{P}^2$ è una figura composta da quattro vertici P, Q, R, S e da tre coppie di lati opposti

$$\overline{SR},\ \overline{PQ}, \qquad \overline{SP},\ \overline{RQ}, \qquad \overline{SQ},\ \overline{RP}.$$

(Vedi Fig. 1).

Teorema. *(Teorema del quadrangolo). Siano A, B i punti di intersezione dei lati opposti*

$$A = \overline{SR} \cap \overline{PQ} \qquad B = \overline{SP} \cap \overline{RQ},$$

e sia r la retta passante per A, B. Siano inoltre $C = \overline{RP} \cap r$ e $D = \overline{SQ} \cap r$. Allora

$$(ABCD) = -1.$$

(Vedi Fig. 2).

Il teorema del quadrangolo può esssere applicato per risolvere il seguente problema grafico:

Problema. Dati A, B, C su una retta r, costruire il quarto armonico, cioè il punto D tale che $(ABCD) = -1$.

Soluzione. Tracciare due rette uscenti da A: l, m.
Tracciare una retta per C: questa retta interseca m in un punto $R \in m$ e in un punto $P \in l$.
Tracciare la retta $\overline{BP}$: questa retta interseca m in un punto $S \in m$.
Tracciare la retta $\overline{BR}$: questa retta interseca l in un punto $Q \in l$.

Applicando il teorema del quadrangolo al quadrangolo P, Q, R, S, si ha che la retta $\overline{SQ}$ interseca la retta r nel punto D, quarto armonico di A, B, C.
(Vedi Fig. 3).