1. Verificare che la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \frac{1}{2} \\ \cos t \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$ sta nell'intersezione della sfera di centro $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 1 con il cilindro retto $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

2. Disegnare la quadrica $x^2 + 2y^2 - z^2 = 4$. (Sugg.: tagliarla con piani orizzontali). Dire se è una superficie di rotazione.

3. Disegnare le quadriche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 = 4$ e $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 = -4$ (Sugg.: Portare la forma quadratica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3$ in forma canonica metrica tramite un'isometria etc...).

4. Sia data la superficie $S(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ u + v \\ u^2 + uv \end{pmatrix}$ e sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare i punti regolari di S.
   (b) Verificare che P è un punto di S.
   (c) Determinare le linee coordinate su S, passanti per P.
   (d) Determinare altre due curve su S, passanti per P.
   (e) Determinare la prima forma fondamentale di S.
   (f) Determinare se le linee coordinate su S passanti per P sono ortogonali fra loro (in P).
   (g) Determinare se le curve del punto (d) sono ortogonali fra loro (in P).

5. Sia data la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, sul piano (x_2, x_3).
   (a) Disegnare γ.
   (b) Determinare una parametrizzazione della superficie di rotazione S ottenuta ruotando γ all'asse x_3.
   (c) Disegnare S.
   (d) Determinare tutti i punti di S il cui piano tangente è un piano verticale.
   (e) Determinare l'area della parte della superficie S compresa tra i piani orizzontali $x_3 = -\frac{1}{2}$ e $x_3 = \frac{1}{2}$.

6. Sia dato il cilindro $S: \ x_1^2 + x_2^2 = 4$.
   (a) Determinare una parametrizzazione di S come superficie di rotazione.
   (b) Determinare una parametrizzazione di S come superficie rigata.
   (c) Parametrizzare la parte di S compresa fra i due piani orizzontali $x_3 = 1$ e $x_3 = 3$ e calcolarne l'area.
   (d) Parametrizzare la parte di S compresa nel primo ottante e fra i due piani orizzontali $x_3 = -1$ e $x_3 = 3$. Calcolarne l'area.

7. (*Elicoide*) Sia data la superficie $S(u, v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ \lambda u \end{pmatrix}$, dove λ è una costante.
   (a) Verificare che S è una superficie rigata.
   (b) Determinare il versore normale alla superficie $N(u, v)$, al variare di (u, v).
   (c) Verificare che la cotangente dell'agolo formato da $N(u, v)$ con l'asse x_3 è proporzionale alla distanza di $S(u, v)$ da tale asse.

8. (*Elicoide*) Verificare che $S(u, v) = \begin{pmatrix} \sinh v \cos u \\ \sinh v \sin u \\ u \end{pmatrix}$ e $T(u, v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ u \end{pmatrix}$ sono due parametrizzazioni equivalenti della stessa superficie.

9. Sia dato il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 1$. Parametrizzarlo in modo che la prima forma fondamentale risulti identicamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Sia $S(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il cilindro retto sulla curva piana γ.

(a) Verificare che S è una superficie rigata sviluppabile.

(b) Parametrizzare S in modo che la prima forma fondamentale risulti identicamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Sia $S(u,v) = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \gamma_1(u) \\ \gamma_2(u) \\ \gamma_3(u) \end{pmatrix}$ il cono di vertice P sulla curva γ.

(a) Verificare che S è una superficie rigata sviluppabile.

(b) Verificare che possiamo scegliere γ in modo che la prima forma fondamentale risulti $\begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Verificare che la prima forma fondamentale di una superficie parametrizzata regolare S non cambia applicando ad S un movimento rigido dello spazio (ossia la composizione di una traslazione con una rotazione).