COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 6 punti. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *Determinare massimo e minimo della funzione*

$$\left|\frac{z}{z-2}\right|$$

sull'insieme $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Sol.: La funzione $f(z) = \frac{z}{z-2}$ è olomorfa, e dunque continua, su un intorno aperto del compatto $\overline{\Delta}$, per cui $|f|$ assume massimo e minimo in $\overline{\Delta}$. Per il principio del massimo modulo $|f|$ assume il massimo sul bordo $\overline{\Delta} = \{|z| = 1\}$. Per $|z| = 1$ vale $|z-2| \geq ||z|-2| \geq |1-2|$, da cui segue che

$$\left|\frac{z}{z-2}\right| \leq \left|\frac{1}{z-2}\right| \leq \left|\frac{1}{1-2}\right| = 1.$$

Dunque il massimo di $|f|$ è ≤ 1. D'altra parte $|f(1)| = 1$, per cui il massimo è proprio 1. È evidente che il minimo è $|f(0)| = 0$.

5. *Sia $R > 0$ fissato. Mostrare che, per n sufficientemente grande, la funzione*

$$f_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$$

ha tutti i suoi zeri nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > R\}$.

Sol.: La succesione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sui compatti alla funzione non nulla $f(z) = e^z \neq 0$ (le f_n sono le troncate n-sime dello sviluppo in serie di e^z centrato in 0). Sul compatto $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq R\}$ la funzione $f(z) = e^z$ ha minimo positivo. Quindi, per n sufficientemente grande, $f_n(z) \neq 0$ sul compatto $\{|z| \leq R\}$. In particolare, per n sufficientemente grande, gli zeri delle funzioni f_n stanno in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$.

6. *Calcolare*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2} d\theta.$$

Sol.: Con le solite sostituzioni $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ e $d\theta = -\frac{i}{z}$, l'integrale diventa

$$I = \int_\gamma \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1} dz,$$

dove $\gamma = \{z = e^{i\theta}, \ \theta \in [0, 2\pi]\}$. La funzione integranda $f(z) = \frac{-2i}{z^2+4z+1}$ ha due poli semplici negli zeri del denominatore. Solo $z_0 = -2 + \sqrt{3}$ si trova all'interno della curva, per cui

$$I = 2\pi i Res(f, z_0) = 2\pi i \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$