Corso di Laurea in Matematica
III appello di Analisi Reale - 11 luglio 2018

- Le risposte non motivate, senza conti o incomprensibili non saranno prese in considerazione.
- **Consegnare solo questi fogli.**
- Non sono ammessi libri, quaderni, calcolatrici, telefonini.

Cognome e nome:	Esercizio	1	2	3	4	5	6
	Voto (in 10-mi)						

---

4) *Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa iniettiva. Mostrare che $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.*

Sol.: Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funzione olomorfa. Consideriamo il comportamento di f nel punto all'infinito: non può avere una singolarità rimovibile, perchè altrimenti f sarebbe olomorfa sulla sfera di Riemann e quindi costante (per il principio del massimo modulo); non può avere una singolarità essenziale, perché altrimenti l'immagine di ogni aperto $|z| > R$ sarebbe densa in $\mathbb{C}$ (per il teorema di Casorati-Weierstrass) e avrebbe intersezione non vuota con l'immagine (aperta, non vuota) del disco unità. Questo contro l'iniettività di f. Conclusione: f ha un polo all'infinito. Di conseguenza f è un polinomio. Per l'iniettività può essere solo un polinomio di grado 1, ossia $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

5) *Calcolare l'integrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 4\cos\theta} d\theta.$$

Sol.: Con le sostituzioni $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = Re(z)$, $\bar{z} = z^{-1}$, $d\theta = -i\frac{1}{z}dz$, l'integrale diventa

$$\int_\gamma \frac{-i}{-2z^2 + 5z - 2} dz,$$

dove $\gamma = \{z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. La funzione integranda $f(z) = \frac{-i}{-2z^2+5z-2}$ ha due poli semplici: $z = 2$ e $z = \frac{1}{2}$. Solo $z = 1/2$ è interno alla curva e $Ind(\gamma, \frac{1}{2}) = 1$. Dal teorema dei residui troviamo

$$\int_\gamma \frac{-i}{-2z^2 + 5z - 2} dz = \int_\gamma \frac{-i}{-2(z-2)(z-\frac{1}{2})} dz = 2\pi i Res(f, \frac{1}{2}) = 2\pi i(-\frac{i}{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

6) *(a) Mostrare che l'equazione $e^z = 3z$ ha almeno una soluzione reale nell'intervallo* $[0, 1]$.
(b) Mostrare che l'equazione $e^z = 3z$ ha esattamente una soluzione in $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| \leq 1\}$.

Sol.: (a) Consideriamo la funzione $f(x) = e^x - 3x$: la funzione è continua, inoltre $f(0) = 1 > 0$ ed $f(1) = e - 3 < 0$. Quindi esiste $0 < x_0 < 1$ per cui vale $f(x_0) = 0$.
(b) Consideriamo le funzioni $f(z) = e^z - 3z$ e $g(z) = 3z$. Per $|z| = 1$, vale

$$|f(z) + g(z)| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} = e^{\cos\theta} \leq e < 3 = |3z| = |g(z)|.$$

Ne segue che f e g hanno lo stesso numero di zeri all'interno del disco, cioè uno zero. Hanno anche lo stesso numero di zeri in $\overline{\Delta}$, in quanto f non ha zeri sul bordo del disco. Dunque, l'equazione $e^z = 3z$ ha esattamente una soluzione in $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| \leq 1\}$.