COGNOME NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Ogni esercizio vale 6 punti. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

1. Sia $\gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Calcolare i seguenti integrali complessi:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{z^{n-1}}{3z^n - 1} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz.$$

Sol.:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4} dz = -\frac{1}{3} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z^3}\right)' dz = 0.$$

Sia $f(z) = 3z^n - 1$. Allora $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, ha n zeri all'interno del disco unit e vale $f'(z) = 3nz^{n-1}$. Applicando il principio dell'argomento troviamo

$$\int_{\gamma} \frac{z^{n-1}}{3z^n - 1} dz = \frac{1}{3n} \int_{\gamma} \frac{3nz^{n-1}}{3z^n - 1} dz = 2\pi i \frac{1}{3n} n = \frac{2}{3} \pi i.$$

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} -i e^{-i\theta} d\theta = 0.$$

2. Sia $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Supponiamo che esistano un intero $k \geq 2$ ed una costante $c \in \mathbb{R}$ per cui vale

$$|f(z)| \leq c|z|^k, \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

- (a) Mostrare che f un polinomio di grado al pi k .
 (b) Quanto valgono $f(0)$ ed $f'(0)$?

Sol.: (a) Sia $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ lo sviluppo in serie di f centrato in 0, convergente su tutto $\mathbb{C}$, dove $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$. Combinando le stime di Cauchy con l'ipotesi (*), abbiamo

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{n!}{r^n} cr^k \leq \frac{n!c}{r^{n-k}}, \quad \forall r > 0.$$

In particolare, per $r \rightarrow \infty$, otteniamo $f^{(n)}(0) = 0$ per $n > k$. Ne segue che f un polinomio di grado al pi k .

(b) Per continuit $|f(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| \leq \lim_{z \rightarrow 0} c|z|^k = 0$;

$$|f'(0)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \lim_{z \rightarrow 0} c|z|^{k-1} = 0.$$

Conclusione: $f(0) = f'(0) = 0$.

3. Sia data la funzione olomorfa $f(z) = 3z^{100} - e^z$. Determinare quanti zeri ha all'interno del disco unit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Sol.: Applichiamo il teorema di Rouch ad $f(z) = 3z^{100} - e^z$ e $g(z) = 3z^{100}$. Per ogni z con $|z| = 1$ abbiamo

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^x \leq e < 3 = |g(z)|.$$

Dunque $\#Z(f) = \#Z(g) = 100$ all'interno del disco unit.