ARC 2017 (Molle-Geatti) Appello 1 Roma, 1 febbraio 2018, ore 9:30–12:30.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete.* Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

---

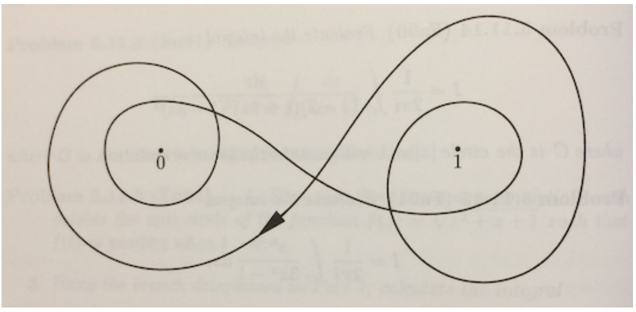
4. *Determinare l'espansione in serie della funzione* $f(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)}$ *vicino a* 0 *e determinarne il raggio di convergenza.*

   Sol.: : Per $|z| < 1$, possiamo scrivere $\frac{z^2}{(1-z^2)} = \sum_{n\geq 0} z^{2n+2}$. Questo è lo sviluppo in serie di f in un intorno di 0. La costruzione mostra che il raggio di convergenza della serie è almeno 1. Non puo' essere maggiore di 1 perchè i punti $z = \pm 1$, di modulo 1, sono punti singolari della funzione. Si può controllare col teorema di Cauchy-Hadamard che il raggio di convergenza della serie è proprio 1.

5. *Sia* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di polinomi complessi, tutti di grado minore o uguale ad un* N *fissato. Mostrare che se* $p_n \to p$ *uniformemente sui compatti, allora la funzione limite* p *è un polinomio di grado minore o uguale ad* N.

Sol.: : Per il teorema di convergenza di Weierstrass, la funzione limite p è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ e le sue derivate sono il limite uniforme sui compatti della derivate complesse dei polinomi p_n. Le derivate di ordine $k > N$ dei polinomi p_n sono identicamente nulle. Di conseguenza sono identicamente nulle anche le derivate di ordine $k > N$ di p. Questo dimostra che anche p è un polinomio di grado $\leq N$.

6. *Calcolare* $\int_\gamma \frac{e^z-1}{z^2(z-1)}dz$, *dove* γ *è la curva disegnata qui sotto.*



Sol.: : La funzione integranda f ha due singolarità isolate, in $z = 0$ e in $z = 1$. Per il teorema dei residui, l'integrale cercato è uguale a

$$2\pi i(Ind_\gamma(0)Res(f,0) + Ind_\gamma(1)Res(f,1) = 2\pi i(-2Res(f,0) + 2Res(f,1)).$$

Il punto $z = 1$ è un polo semplice e $Res(f,1) = e - 1$. Il punto $z = 0$ è un polo semplice e $Res(f,0) = -1$, dato che

$$\frac{e^z-1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z}\frac{(1+z+z^2/2+\ldots)-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z}\frac{(1+z/2+\ldots)}{(z-1)}.$$

Conclusione: l'integrale cercato è uguale a

$$2\pi i(-2(-1) + 2(e-1)) = 4\pi i e.$$