

1. Sia  $D \subset \mathbf{C}$  un aperto, sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow D$  una curva e sia  $f$  un funzione continua su  $\gamma$ . Dimostrare che la funzione

$$\phi(z) := \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi$$

è una funzione olomorfa per  $z \notin \gamma$ , con derivata complessa  $\phi'(z) = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$ .

2. Sia  $\gamma = \{t \mid t \in [0, 1]\}$  e sia  $f$  la funzione definita da

$$\phi(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{(\xi - z)} d\xi.$$

Calcolare esplicitamente  $f$  e verificare che è olomorfa, per  $z \notin \gamma$ .

3. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{\sin^3 z}{(z - 10)^3} dz$$

dove  $\gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ , la circonferenza di centro 0 e raggio 1, oppure  $\gamma$  è il quadrato di vertici 0, 1,  $1 + i, i$ .

4. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{\cos^3 z}{(z - \pi/4)^3} dz$$

dove  $\gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ , la circonferenza di centro 0 e raggio 1.

5. Sia  $\gamma = \{e^{-i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$  la circonferenza di centro 0 e raggio 1 percorsa in senso antiorario. Per ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$ , scrivere una funzione  $f$  olomorfa non costante su  $\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$  tale che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \lambda.$$