1. n.3, $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx.$

*Sol.:* Fissiamo la determinazione del logaritmo per cui $\arg(z) \in [0, 2\pi[$.
Consideriamo la curva $\gamma = [-R, R] \cup C_R^+$, dove $C_R^+ = \{Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]\}$.

Per $R$ grande abbastanza, dal teorema dei residui otteniamo

$$\int_\gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i\ Res(\frac{\log(z+i)}{z^2+1}, i) = \pi \log 2 + i\pi^2/2. \tag{1}$$

D'altra parte vale anche l'uguaglianza

$$\int_\gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = \int_{-R}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{C_R^+} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz. \tag{2}$$

Abbiamo

$(a)$ $\int_{C_R^+} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz \to 0, \quad R \to +\infty.$

*Dim.:* Su $C_R^+$, abbiamo $z = Re^{i\theta}$, con $\theta \in [0, \pi]$, e $dz = Rie^{i\theta} d\theta$. Inoltre, per $R \to +\infty$, vale

$$\left| \frac{z \log(z+i)}{z^2+1} \right| = \left| \frac{Re^{i\theta} \log(Re^{i\theta}+i)}{R^2 e^{i2\theta}+1} \right| = \left| \frac{R(\log \sqrt{R^2+1+2R\sin\theta} + i \arg(Re^{i\theta}+i))}{R^2 e^{i2\theta}+1} \right| \to 0.$$

Adesso (a) segue dal Lemma 1 (cf. Cartan, III, 6.2, pag.101).

$(b)$

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx &= \int_{-R}^{R} \frac{\log|x+i|}{x^2+1} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx \\ &= \int_{0}^{R} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + i \int_{-R}^{R} \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

Per $R \to +\infty$, da (1) e (2) otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arg(x+i)}{x^2+1} dx = \pi \log 2 + i\pi^2/2,$$

da cui

$$\int_0^{R} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \log 2.$$