COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *(a) Determinare tutti i valori delle funzioni*

$$\log(-4), \qquad i^i.$$

(b) Fissare la determinazione del logaritmo per cui $arg(z) \in [2\pi, 4\pi[$ *e determinare il valore delle funzioni in (a) in base a tale scelta.*

Sol.: (a) $\log(-4) = log 4 + i(\pi + 2\pi k)$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.
$\log(i) = \log|i| + i(\pi/2 + 2\pi k) = i(\pi/2 + 2\pi k)$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.
Da cui $i^i = e^{i\log(i)} = e^{-(\pi/2+2\pi k)}$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Per $k = 1$, abbiamo $\log(-4) = \log 4 + i(3\pi)$.
Per $k = 1$, abbiamo $\log(i) = \log|i| + i(\pi/2 + 2\pi) = i(5\pi/2)$;
di conseguenza $i^i = e^{-(5\pi/2)}$.

5. *(a) Sia* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un aperto connesso. Sia* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *olomorfa non costante. Dimostrare che* $|f|$ *può avere minimo locale solo sugli zeri di* f.
(b) Determinare il massimo e il minimo di $\left|\frac{z+2}{z-2}\right|$ *sul disco unitario* $|z| \leq 1$.

Sol.: (a) (questo è l'esercizio 2 del Foglio 6) Supponiamo per assurdo che f assuma minimo locale in un punto z_0 in cui non si annulla. Allora $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ è una funzione olomorfa in un dischetto aperto di centro z_0 con un massimo locale in z_0. Per il principio del massimo modulo, g è costante, Ne segue che anche f è costante in quel dischetto, e dunque costante su Ω per il principio di identità. Contraddizione.
(b) La funzione $f(z) = \frac{z+2}{z-2}$ è olomorfa e non nulla in un intorno aperto del disco unità $\{|z| < 1\}$. Per il principio della massimo modulo e per quanto dimostrato in (a), $|f(z)|$ assume sia massimo che minimo sul bordo del disco. Dalle disuguaglianze

$$1 \leq ||z| - 2| \leq |z + 2| \leq |z| + 2 \leq 3, \quad 1 \leq ||z| - 2| \leq |z - 2| \leq |z| + 2 \leq 3, \qquad \text{quando } |z| = 1,$$

abbiamo

$$\frac{1}{3} \leq \left|\frac{z+2}{z-2}\right| \leq 3.$$

Il valore massimo 3 è assunto in $z = 1$, Il valore minimo $1/3$ è assunto in $z = -1$.

6. *Determinare quali sono i possibili valori dell'integrale*

$$\int_C \frac{1}{z(z^2-1))} dz,$$

dove C *è una curva semplice chiusa, orientata in senso antiorario, che non passa per* $0, 1, -1$. *Esibire delle curve* C *per cui tali valori sono assunti.*

Sol.: Sia $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)}$. La funzione f ha tre poli semplici nei punti 0, 1, -1, con residui

$$Res(f, 0) = -1, \qquad Res(f, 1) = \frac{1}{2}, \qquad Res(f, -1) = \frac{1}{2}.$$

Poiché la curva C è semplice chiusa, l'indice di avvolgimento intorno ad un punto assume valore 1 se il punto sta all'interno della curva, e valore 0 se il punto sta all'esterno della curva. Quindi i valori che l'integrale

$$\int_C \frac{1}{z(z^2-1))} dz = 2\pi i(Ind(C, 0)Res(f, 0) + 2\pi i(Ind(C, 1)Res(f, 1) + 2\pi i(Ind(C, -1)Res(f, -1)$$

può assumere sono i seguenti:

(a) 0, se i tre poli stanno tutti all'esterno della curva oppure tutti all'interno della curva;

(b) $2\pi i(-1) = -2\pi i$, se 0 sta all'interno della curva e 1, -1 stanno all'esterno;

(c) $2\pi i(\frac{1}{2}) = \pi i$, se 1 sta all'interno della curva e 0, -1 stanno all'esterno, oppure se -1 sta all'interno della curva e 0, 1 stanno all'esterno;

(d) $2\pi i(-\frac{1}{2}) = -\pi i$, se 0, 1 stanno all'interno della curva e -1 sta all'esterno, oppure se 0, -1 stanno all'interno della curva e 1 sta all'esterno;

(e) $2\pi i(1) = 2\pi i$, se -1, 1 stanno all'interno della curva e 0 sta all'esterno.