COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *Determinare se è possibile fissare una determinazione del logaritmo in modo che la funzione* $G(z) = \log(z^2 + 1)$ *sia olomorfa nel sempiano* $R^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$*, spiegando bene la risposta. In tal caso fissarne una.*

Sol.: Se $z \in R^+$, possiamo scrivere $z = re^{i\theta}$, con $r > 0$ e $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. Inoltre, $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$, con $r > 0$ e $2\theta \in]-\pi, \pi[$. Ne segue che l'immagine di R^+ tramite la funzione $w \mapsto w^2 + 1$ è $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ ed è contenuta in $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Notare che i punti della semiretta $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ hanno argomento uguale a π, oppure $\pi + 2k\pi$, per un intero k fissato.

Su $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ esiste una determinazione continua (e quindi olomorfa) del logaritmo: ad esempio quella per cui $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$. Le altre possibili determinazioni del logaritmo sono $\arg(z) \in]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$, per un intero k fissato.

5. *Calcolare l'integrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Sol.: I due zeri del polinomio $x^2 + x + 1 = 0$ sono $x = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ e non appartengono all'asse reale. La funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{(-1 \pm i\sqrt{3})/2\}$ ed ha un polo di ordine uno in ognuno dei punti $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Sia γ_R la curva data da $[-R, R] \cup \{Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]\}$. Per ogni R sufficientemente grande, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{\{Re^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]\}} \frac{dz}{z^2+z+1} \\ &= 2\pi i Ind(\gamma_R, (-1+i\sqrt{3})/2) Res(f(z), (-1+i\sqrt{3})/2) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i\sqrt{3}/2} = 2\pi\sqrt{3}/3.\end{aligned}$$

D'altra parte per $R \to \infty$

$$\int_{\{Re^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]\}} \frac{dz}{z^2+z+1} \to 0$$

perché vale $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Conclusione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = 2\pi\sqrt{3}/3.$$

6. *Dimostrare che per ogni numero reale* $\lambda > 1$*, la funzione olomorfa* $f(z) = ze^{\lambda - z} - 1$ *ha esattamente uno zero nel disco unità* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Sol.: Definiamo $g(z) = ze^{\lambda - z}$. Per ogni numero reale $\lambda > 1$ e per ogni $z = \cos\theta + i\sin\theta \in \partial\Delta$, vale

$$|g(z)| = |e^{\lambda - \cos\theta - i\sin\theta}| = |e^{\lambda - \cos\theta}| > 1.$$

Dunque su $\partial\Delta$ vale

$$1 = |f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

e per il teorema di Rouché

$$\#Z(f) = \#Z(g) = 1$$

all'interno del disco.