*COGNOME* .................................. *NOME* ................................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *Dimostrare che non esiste una funzione olomorfa* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(non costante!) tale che* $\mathrm{Re}(f) > 0$ *per ogni* $z \in \mathbb{C}$.

*Sol.*: Si può verificare direttamente che $f$ come sopra è necessariamente costante: sia $g(z) := \frac{1}{f(z)+1}$. Dalle ipotesi segue che $f(z) + 1 \neq 0$ su $\mathbb{C}$, per cui $g(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Inoltre $g$ è limitata: infatti

$$|f(z) + 1|^2 = (\mathrm{Re}(f(z)) + 1)^2 + \mathrm{Im}(f(z))^2 > 1, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

da cui $|g(z)| < 1$ e, per il teorema di Liouville,

$$g(z) \equiv \textit{costante}.$$

Ne segue che anche $f$ è costante.

Alternativamente:

Il semipiano destro $R^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ è biolomorfo al disco unità, ossia esiste $\phi\colon R^+ \to \Delta$ olomorfa e invertibile con inversa olomorfa. Ne segue che se $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ha immagine contenuta in $R^+$, la funzione composta $\phi \circ f\colon \mathbb{C} \to \Delta$ è una funzione intera limitata. Per il teorema di Liouville, $\phi \circ f$ è costante. Poiché $\phi$ è iniettiva, $f$ è necessariamente costante.

5. *Sia* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una funzione olomorfa. Dimostrare che* $f$ *è un polinomio se e solo se ha un polo all'infinito.*

*Sol.*: Sia $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ lo sviluppo in serie di $f$ centrato in $z = 0$. la funzione $f$ ha un polo all'infinito se e solo se ponendo $z = 1/u$, la funzione $g(u) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{u^n}$ ha un polo in $u = 0$. Questo succede se e solo se la serie di $f$ ha solo un numero finito di termini, ossia è un polinomio.

6. *Calcolare l'integrale* $\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2 d\theta$.

*Sol.*: Se $z$ è un numero complesso di modulo uno, possiamo scrivere $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ e $dz = ie^{i\theta}d\theta$, da cui $\cos\theta = \mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ e $d\theta = -ie^{-i\theta}dz = \frac{-i}{z}dz$. Con queste sostituzioni l'integrale diventa

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2 d\theta = \int_\gamma \frac{-i}{4}\frac{(z^2+1)^2}{z^3}dz, \qquad \gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

La funzione integranda è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e nell'origine ha un polo di ordine 3. Ne segue che

$$I = 2\pi i Ind(\gamma, 0) Res(\frac{-i}{4}\frac{(z^2+1)^2}{z^3}, z = 0) = 2\pi i \frac{1}{2} h''(0) = 2\pi i(-i) = \pi,$$

dove $h(z) = \frac{-i}{4}(z^2 + 1)^2$. Si poteva arrivare allo stesso risultato vedendo $I$ come l'integrale di Cauchy della derivata seconda in $z = 0$ della funzione olomorfa $h(z)$.