ARC 2016. Esercizi 7. Sviluppi di Laurent. Singolarita'.

1. Determinare l'anello di convergenza delle serie di Laurent
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} a^{n^2} z^n, \quad 0<|a|<1, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} a^n z^n, \quad a\neq 0, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z^n}{|n|!}, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n}, \qquad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{z^n}{|n|^n}.$$

2. Sia $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $\quad 0<|a|<|b|$.
   (i) Determinare le 3 serie di Laurent di f centrate in zero: su $\Delta(0,|a|)$, su $A_{|a|,|b|}(0)$ e su $A_{|b|,+\infty}(0)$.
   (ii) Determinare le 2 serie di Laurent di f centrate in $z=a$: su $A_{0,|a-b|}(a)$ e su $A_{|a-b|,+\infty}(a)$.

3. Sia $f(z)=\frac{z^2}{z^2+1}$.
   (i) Determinare la serie di Laurent di f intorno a $z=i$.
   (ii) Determinare il tipo di singolarità di f all'infinito.

4. Sia $f(z)=\frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}$.
   (i) Far vedere che $z=i$ è un polo di f di ordine 3.
   (ii) Calcolare i coefficienti negativi della serie di Laurent di f centrata in $z=i$.
   (iii) Far vedere che $z=-2$ è un polo di f di ordine 2.
   (iv) Calcolare i coefficienti negativi della serie di Laurent di f centrata in $z=-2$.

5. Determinare le singolarità delle seguenti funzioni:
$$\tan z, \qquad \frac{1}{\sin(1-1/z)}, \qquad \frac{1}{z^3}\sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n, \qquad z e^{1/z} e^{-1/z^2}, \qquad \frac{\sin z}{z^k},\ k\in\mathbf{N}, \qquad \frac{1}{z^3}-\cos z.$$

6. Sia f una funzione olomorfa sull'insieme $\Delta(0,r)\setminus\{0\}$, $\quad 0<r\leq+\infty$. Supponiamo che $z=0$ sia un polo di ordine k. Allora lo sviluppo di Laurent di f in $z=0$ è dato da
$$f(z)=\sum_{n\geq -k} a_n z^n, \qquad a_n=\frac{1}{(n+k)!}g^{(n+k)}(0), \quad \text{dove } g(z)=z^k f(z).$$

7. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa.
   (a) Verificare che, se f che ha uno zero di ordine k in $z=0$, allora $1/f$ ha un polo di ordine k in $z=0$.
   (b) Se f che ha una singolarità in $z=0$ (rimovibile, essenziale, polo), determinare i tipi di singolarià di $1/f$ in $z=0$, nei vari casi.

8. Sia $\gamma=S^1(0,1)=\{e^{-i\theta},\ \theta\in[0,2\pi]\}$. Per ogni numero reale λ, dare un esempio di una funzione olomorfa non costante sull'anello $A=\{1/2<|z|<2\}$ tale che
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)dz=\lambda.$$

9. Siano $\gamma_2=\{e^{i\theta},\ \theta\in[0,2\pi]\}$, e $\gamma_1=\{3e^{i\theta},\ \theta\in[0,2\pi]\}$. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{z^2+5z}{(z-2)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{z^2+5z}{(z-2)}dz$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{z^2-2}{z}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{z^2-2}{z}dz$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz$$