ARC 2016. Esercizi 6. Principio del massimo modulo. Lemma di Schwarz. Automorfismi del disco.

Alcuni di questi esercizi sono stati fatti in classe: rifarli a libro chiuso.

1. Siano $f(z) = z^2 - 3z + 2$ e $g(z) = (2z+1)/(2z-1)$. Calcolare il massimo di $|f(z)|$ su $\overline{\Delta(0,1)}$ e il sup di $|g(z)|$ su $\overline{\Delta(0,1)} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2. Sia $\Omega \subset \mathbf{C}$ un aperto connesso. Sia $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ olomorfa non costante. Allora $|f|$ può avere minimo locale solo sugli zeri di f.

3. Sia f una funzione non costante, olomorfa in un intorno del disco unità Δ. Se $|f|$ è costante su $\partial\Delta$, allora f ha almeno uno zero in Δ.

4. Sia f una funzione non costante, olomorfa in un intorno del disco unità Δ. Se $|f(z)| > 2$ per $|z| = 1$, e $f(0) = 1$, allora f ha almeno uno zero in Δ.

5. Considerare la funzione $f(z) = e^z$ sul dominio relativamente compatto $D \subset \mathbf{C}$. Spiegare perchè il massimo e il minimo modulo di f sono assunti sul bordo di D. Calcolarli per $D = \Delta(0,1)$.

6. Considerare la funzione $f(z) = e^{e^z}$ sul dominio $U = \{z = x + iy \mid -\pi/2 < y < \pi/2\} \subset \mathbf{C}$.
   (a) Calcolare $\sup|f(z)|$ sul bordo di U;
   (b) Calcolare $\sup|f(z)|$ su $\mathbf{R}$;
   Confrontare i risulati trovati con il principio del massimo modulo.

7. (formulazione alternativa del Lemma di Schwarz) Sia $f\colon \Delta \to \Delta$ una funzione olomorfa del disco in sè, tale che $f(0) = 0$. Allora
   (a) $|f(0)'| \leq 1$.
   (b) se $|f(0)'| = 1$, allora $f(z) = e^{i\theta}z$, per $\theta \in \mathbf{R}$.

8. (Lemma di Schwarz-Pick) Sia $f\colon \Delta \to \Delta$ una funzione olomorfa del disco in sè. Allora
   (a) $|\frac{f(z)-f(w)}{1-f(z)\overline{f(w)}}| \leq |\frac{z-w}{1-z\overline{w}}|$, per ogni $z, w \in \Delta$.
   (b) $\frac{|f(z)'|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$, per ogni $z \in \Delta$.
   (suggerimento: comporre f con opportune funzioni in modo da poter applicare il Lemma di Schwarz alla funzione ottenuta).

9. Sia $f\colon \Delta \to \Delta$ una funzione olomorfa del disco in sè. Supponiamo che $f(0) = 0$ e che $z = 0$ sia uno zero di ordine m. Allora $|f(z)| \leq |z|^m$, for all $z \in \Delta$.

10. Sia $f\colon \Delta(0,1) \longrightarrow \Delta(0,1)$ un automorfismo del disco unità, diverso dall'identità. Mostrare che se f ha un punto fisso in $\Delta(0,1)$, allora esso è necessariamente unico.

11. Siano $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ il disco unità e $H^+ = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid x > 0\}$ il semipiano destro di $\mathbf{C}$. Costruire un biolomorfismo $\phi\colon \Delta \to H^+$ (cioè una mappa olomorfa, biiettiva con inversa olomorfa).

12. Sia $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ una funzione olomorfa. Se $Re(f(z)) < 0$, per ogni $z \in \mathbf{C}$, allora f è costante.