1. Sia $f$ olomorfa sull'insieme aperto $\Omega \subset \mathbf{C}$, sia $z_0 \in \Omega$ e sia $\sum a_n(z-z_0)^n$ la serie di Taylor di $f$ in $z_0$. Usando le stime di Cauchy, far vedere che il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale al raggio del più grande disco $\Delta(z_0, r)$ di centro $z_0$ contenuto in $\Omega$.

2. Scrivere la serie di Taylor di $f(z) = \frac{1}{(z+1)}$ in $z_0 = 1+i$. Qual è il raggio di convergenza della serie ottenuta?

3. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \leq |e^z|$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Dimostrare che $f(z) = ce^z$, per una costante $c \in \mathbf{C}$.

4. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ una funzione olomorfa. Supponiamo che esistano costanti positive $M$ e $c$ per cui $|f(z)| \leq M(c+|z|^n)$, per ogni $z \in \mathbf{C} \setminus \Delta(0,R)$, con $R > 0$.
   (a) Mostrare che $f$ è un polinomio di grado minore o uguale ad $n$.
   (b) Nel caso in cui $|f(z)| \leq M|z|^2$, etc ..., quanto valgono $f(0)$ ed $f'(0)$?

5. Siano $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ due funzioni olomorfe, tali che $|f(z)| \leq |g(z)|$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Supponiamo che $g(z_0) = 0$ e che $g(z) \neq 0$, per $z \neq z_0$. Dimostrare che $f(z) = cg(z)$, per una costante $c \in \mathbf{C}$.

6. Sia $f\colon \mathbf{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ una funzione olomorfa e limitata. Far vedere che $f$ è costante. (suggerimento: considerare la funzione $g(z) = \begin{cases} z^2 f(z), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$, mostrare che è olomorfa, e applicare l'esercizio 4...).

7. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa e doppiamente periodica, i.e. $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbf{C}$, dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$. Allora $f$ è costante.

8. Mostrare che non esiste una funzione olomorfa $f\colon D \to \mathbf{C}$, con $D$ un intorno aperto di 0, tale che
   (a) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n^2}$;
   (b) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$;
   (c) $|f^{(n)}(0)| > n!\, n^n$;

9. Sia $\Omega \subset \mathbf{C}$ aperto connesso. Siano $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfe, tali che $f \cdot g \equiv 0$. Allora $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$.

10. Sia $f$ una funzione olomorfa su un intorno del disco chiuso $\overline{\Delta(0,1)}$, non identicamente nulla su $\Delta(0,1)$.
    (a) Dimostrare che $f$ ha al più un numero finito di zeri in $\Delta(0,1)$.
    (b) Determinare gli zeri di $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$ nel disco $\Delta(0,1)$ e confrontare il risultato col punto precedente.

11. Trovare tutti gli zeri delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$. Sia $U = \mathbf{C} \setminus \{\pi/2 \pm k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Sia $f$ olomorfa su $U$ e tale che $f(\pi/n) = \tan(\pi/n),\ n \geq 3$. Dedurre che $f$ non è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$ e che non assume il valore $i$.