COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *Siano f e g funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$, tali che $|f(z)| \leq |g(z)|$, per ogni $z \in \mathbb{C}$. Mostrare che esiste $c_0 \in \mathbb{C}$, con $|c_0| \leq 1$, tale che $f(z) = c_0 g(z)$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.*

Sol.: Osserviamo innanzitutto che se z_0 è uno zero di g, allora è anche uno zero di f. Inoltre, l'ordine di z_0 come zero di f è superiore all'ordine di z_0 come zero di g: infatti scrivendo $f(z) = (z - z_0)^m f_1(z)$ e $g(z) = (z - z_0)^n g_1(z)$, con $f_1(z), g_1(z) \neq 0$ in un intorno di z_0, la disuguaglianza

$$|f(z)| = |(z - z_0)|^m |f_1(z)| \leq |g(z)| = |(z - z_0)|^n |g_1(z)|$$

implica $m \geq n$.

Ne segue che la funzione $h(z) = f(z)/g(z)$ è è olomorfa e limitata su tutto $\mathbb{C}$. Quindi possiamo applicare il Teorema di Liouville e ottenere $h(z) \equiv c_0$, con c_0 una costante in modulo ≤ 1. Dunque vale la tesi.

5. *Calcolare (col metodo dei residui)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Sol.: Gli zeri del polinomio $x^2 + x + 1$ sono i numeri complessi coniugati $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, uno nel semipiano superiore e uno nel semipiano inferiore. Se $R > 0$ è sufficientemente grande e $\gamma_R = \{Re^{i\theta},\ \theta \in [0, \pi]\}$, per il teorema dei residui, vale

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz = 2\pi i Res(\frac{1}{z^2 + z + 1}, (-1/2 + i\sqrt{3}/2)).$$

Abbiamo che

$$2\pi i Res(\frac{1}{z^2 + z + 1}, (-1/2 + i\sqrt{3}/2)) = 2\pi i \frac{1}{(-1/2 + i\sqrt{3}/2) - ((-1/2 - i\sqrt{3}/2)} = 2\pi\sqrt{3}/3.$$

Inoltre si verifca facilmente ... che

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2 + z + 1} dz = 0.$$

Di conseguenza l'integrale cercato $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+x+1} dx$ vale $2\pi\sqrt{3}/3$.

6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio e sia $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $|f(z) - 1| < 1$, per ogni $z \in \Omega$. Dimostrare che per ogni curva chiusa γ in Ω vale*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Sol.: (questo è lo stesso esercizio 6 dell'appello 3). Per ipotesi, l'immagine $f(\Omega)$ è interamente contenuta nel disco di centro $z_0 = 1$ e raggio 1. Questo disco non contiene alcuna curva che fa un giro completo intorno all'origine, per cui esiste una determinazione continua dell'argomento su $f(\Omega)$. Visto che $f(\Omega)$ è contenuta nel semipiano $Re(z) > 0$, possiamo scegliere ad esempio $arg(f(z)) \in \,]-\pi, \pi[$. Con questa scelta,

$$h(z) = \log f(z) = \log |f(z)| + i \arg(f(z)), \qquad arg(f(z)) \in \,]-\pi, \pi[,$$

è una funzione olomorfa su Ω. Di conseguenza

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma h(z)' dz = 0.$$