COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, sintetiche e complete*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI.

4. *Sia data la funzione* $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$. *Determinare tutte le singolarità di* f, *specificandone il tipo. Calcolare* $Res_\gamma(f)$, *dove* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 2\}$, *percorsa una volta in senso antiorario.*

Sol.: La funzione data è olomorfa nei punti del piano complesso dove il denominatore è non nullo. Se $z = x + iy$, gli zeri del denominatore sono dati da

$$e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Gli zeri di $e^z - 1$ sono poli di f: in generale, se $g \not\equiv 0$ è una funzione olomorfa, gli zeri di g sono poli di $1/g$. Infatti se z_0 è uno zero di g di ordine k

$$\frac{1}{g(z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{h(z)},$$

per $h(z)$ olomorfa e non nulla su un opportuno intorno di z_0.

Si tratta di poli semplici, in quanto $(e^z - 1)' = e^z \neq 0$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.

La curva γ racchiude un solo polo di f, ossia $z = 0$. Ha indice di avvolgimento $I(\gamma, 0) = 1$. Ne segue che

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res_0(f).$$

Da

$$\frac{1}{(e^z - 1)} = \frac{1}{z(1 + z/2 + \ldots)}$$

segue che $Res_0(f) = 1$ e l'integrale cercato vale $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i$.

5. *Determinare il numero di soluzioni dell'equazione* $5z^5 = e^z$ *nel disco unità* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Sol.: Applichiamo il terorema di Rouché alle funzioni $f(z) = 5z^5 - e^z$ e $g(z) = 5z^5$. Dimostriamo che per $|z| = 1$, vale $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$. Infatti per $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = e^x \leq e < |g(z)| = |5z^5| = 5.$$

Ne segue che f e g hanno lo stesso numero di zeri in Δ, cioè hanno 5 zeri.

6. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un dominio e sia* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *una funzione olomorfa tale che* $|f(z) - 1| < 1$, *per ogni* $z \in \Omega$. *Spiegare perché esiste una determinazione olomorfa di* $\log f(z)$ *su* Ω *e determinarne una.*

Sol.: Per ipotesi, l'immagine $f(\Omega)$ è interamente contenuta nel disco di centro $z_0 = 1$ e raggio 1. Questo disco non contiene alcuna curva che fa un giro completo intorno all'origine, per cui esiste una determinazione continua dell'argomento su $f(\Omega)$. Visto che $f(\Omega)$ è contenuta nel semipiano $Re(z) > 0$, possiamo scegliere ad esempio $arg(f(z)) \in \,]-\pi, \pi[$. Con questa scelta,

$$h(z) = \log f(z) = \log |f(z)| + i \arg(f(z)), \qquad arg(f(z)) \in \,]-\pi, \pi[,$$

è una funzione olomorfa su Ω.

P.S.: altre scelte possibili sono $arg(f(z)) \in \,]-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k[$, per un intero fissato k.