1. Sia $F\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ una funzione olomorfa non costante. Dimostrare che l'immagine $f(\mathbf{C})$ è densa in $\mathbf{C}$.

2. Far vedere che la funzione definita da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ è olomorfa su $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Calcolare il suo integrale su $\gamma = \{z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

3. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3} dz \qquad \gamma = \{e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 6\pi]\} \quad \text{oppure} \quad \gamma = \{e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

4. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_\gamma \frac{z}{(z+1)(z+2i)} dz \qquad \gamma = \{5e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 2\pi]\},$$
$$\int_\gamma \frac{e^z}{\sin z} dz \qquad \gamma = \{e^{i\theta},\ \ \theta \in [0, 6\pi]\},$$
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)(z+1)} dz \qquad \gamma = \text{triangolo di vertici } -3, 1 \pm i, \text{ percorso in senso orario.}$$

5. Calcolare i seguenti integrali col metodo dei residui:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{5 + 3\cos x} dx, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta},$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \ dx}{x^2+4}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

6. Calcolare i seguenti integrali reali col metodo dei residui:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ dx}{x^4+6x^2+13},$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^{10}} dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/4}}{1+x^3} dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ dx}{2+x^4} dx.$$

7. Calcolare
$$\int_\gamma \sin\frac{1}{z} \ dz, \qquad \gamma = \{z = e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

8. Sia $f(z) = z^5 - 3iz + 62$ e sia C una circonferenza (percorsa una volta in senso antiorario) che racchiude tutti gli zeri di f. Calcolare
$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

9. Sia $f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$ e sia $C = \{|z| = 4\}$ (percorsa una volta in senso antiorario). Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

10. Siano f, g funzioni olomorfe sul disco unità e continue sulla circonferenza unitaria γ (percorsa una volta in senso antiorario). Supponiamo che f si annulli nei punti $P_1, \ldots, P_k$ dentro il disco e che sia diversa da zero su γ. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

11. Sia $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \qquad \gamma = \{z = 5e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

12. (Teorema di Hurwitz) Sia $f_n \colon D \longrightarrow D$ una successione di funzioni olomorfe su un dominio $D \subset \mathbf{C}$. Supponiamio che $\{f_n\}$ converga uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa, non identicamente nulla, $f \colon D \longrightarrow \mathbf{C}$. Far vedere che $f(z_0) = 0$, per $z_0 \in D$, se e solo se esiste una successione di punti $\{z_n\}$ in D e un N tali che $z_n \to z_0$ e $f_n(z_n) = 0$, per ogni $n > N$.

Alternativamente:

Sia $f_n \colon D \longrightarrow D$ una successione di funzioni olomorfe mai nulle su un dominio $D \subset \mathbf{C}$. Supponiamio che $\{f_n\}$ converga uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa non identicamente nulla $f \colon D \longrightarrow \mathbf{C}$. Far vedere che f non si annulla mai su D.

13. Far vedere che tutte le radici di $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ si trovano nell'anello $A = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

14. Far vedere che l'equazione $az^n = e^z$ ha n soluzioni nel disco unità, per ogni $a > e$.

15. Far vedere che l'equazione $z \tan z = a$ ha infinite soluzioni reali e nessuna soluzione immaginaria, per ogni $a > 0$.

16. Far vedere che una funzione razionale non ha singolarità essenziali.

17. Dimostrare che una funzione olomorfa su $\mathbf{C} \setminus F$, ove F è un insieme finito di punti, senza singolarità essenziali, è una funzione razionale. Più in generale una funzione meromorfa $\mathbf{C} \setminus D$, ove D è un insieme discreto di punti, senza singolarità essenziali, è una funzione razionale.

18. Siano f e g meromorfe su un aperto connesso D e sia A un sottoinsieme di $D \setminus \{Poli(f) \cup Poli(g)\}$ con un punto di accumulazione. Dimostrare che $f = g$ su A implica $f = g$.