ARC 2015. Esercizi 4. Zeri di funzioni olomorfe, principio del massimo modulo, lemma di Schwarz. Funzioni olomorfe su un anello.

1. Sia $\Omega \subset \mathbf{C}$ aperto connesso. Siano $f, g \colon \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfe, tali che $f \cdot g \equiv 0$. Allora $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$.

2. Sia f una funzione olomorfa su un intorno del disco chiuso $\overline{\Delta(0,1)}$, non identicamente nulla su $\Delta(0,1)$.
   (a) Dimostrare che f ha al più un numero finito di zeri in $\Delta(0,1)$.
   (b) Determinare gli zeri di $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$ nel disco $\Delta(0,1)$ e confrontare con l'esercizio precedente.

3. Trovare tutti gli zeri delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$. Sia $U = \mathbf{C} \setminus \{\pi/2 \pm k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Sia f olomorfa su U e tale che $f(\pi/n) = \tan(\pi/n),\ n \geq 3$. Dedurre che f non è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$ e che non assume il valore i.

4. Siano $f(z) = z^2 - 3z + 2$ e $g(z) = (2z+1)/(2z-1)$. Calcolare il massimo di $|f(z)|$ su $\overline{\Delta(0,1)}$ e il sup di $|g(z)|$ su $\overline{\Delta(0,1)} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

5. Considerare la funzione $f(z) = e^z$ sul dominio relativamente compatto $D \subset \mathbf{C}$. Spiegare perchè il massimo e il minimo modulo di f sono assunti sul bordo di D. Calcolarli per $D = \Delta(0,1)$.

6. Considerare la funzione $f(z) = e^{e^z}$ sul dominio $U = \{z = x + iy \mid -\pi/2 < y < \pi/2\} \subset \mathbf{C}$.
   (a) Calcolare $\sup |f(z)|$ sul bordo di U;
   (b) Calcolare $\sup |f(z)|$ su $\mathbf{R}$;
   Come si conciliano i risulati trovati con il principio del massimo modulo?

7. Sia $f \colon \Delta(0,1) \longrightarrow \Delta(0,1)$ un automorfismo del disco unità, diverso dall'identità. Mostrare che se f ha un punto fisso in $\Delta(0,1)$, allora esso è necessariamente unico.

8. Siano $\Delta = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ il disco unità e $\Pi^+ = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$ il semipiano superiore di $\mathbf{C}$. Dimostrare che la mappa
$$c \colon \Pi^+ \to \Delta, \quad c(z) = \frac{z-i}{z+i}$$
è un biolomorfismo (cioè una mappa olomorfa, biiettiva con inversa olomorfa). Calcolare l'inversa $c^{-1} \colon \Delta \to \Pi^+$.

9. Siano $\gamma_1 = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$, e $\gamma_2 = \{3e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2-2}{z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2-2}{z}dz$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz$$

10. Sia $\gamma = S^1(0,1) = \{e^{-i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Per ogni numero reale λ, dare un esempio di una funzione olomorfa non costante sull'anello $A = \{1/2 < |z| < 2\}$ tale che
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(z)dz = \lambda.$$