ARC 2015. Esercizi 3. Integrali complessi. Formula di Cauchy & appl. Teorema di Liouville.

1. Calcolare
$$\int_\gamma (\bar{z} + z^2\bar{z})dz,$$
dove $\gamma = \{re^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$, la circonferenza di centro 0 e raggio $r > 0$, percorsa una volta, in senso antiorario.

2. Calcolare
$$\int_\gamma (5z^4 - z^3 + 2)dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$, la circonferenza di centro 0 e raggio 1, oppure γ è il quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$, oppure γ è il segmento di estremi $0, 1+i$.

3. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{1}{z+2}dz,$$
dove $\gamma = \{5e^{-i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

4. Calcolare
$$\int_\gamma z(z+4)dz,$$
dove $\gamma = \{2e^{-i\theta},\ \theta \in [0, \pi]\}$.

5. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z - \pi/2)^{10}}dz,$$
dove $\gamma = \{2e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

6. Calcolare
$$\int_\gamma \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

7. Siano $|a| < 1 < |b|$. Per $n, m \in \mathbf{Z}$, calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

8. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz, \qquad \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1/2)^2}dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

9. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2i)}dz,$$
dove $\gamma = \{4e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

10. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2+z}{(z+3)(z-2i)}dz,$$
dove $\gamma = \{1+5e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

11. Sia f olomorfa sull'insieme aperto $\Omega \subset \mathbf{C}$, sia $z_0 \in \Omega$ e sia $\sum a_n(z-z_0)^n$ la serie di Taylor di f in z_0. Usando le stime di Cauchy, far vedere che il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale al raggio del più grande disco $\Delta(z_0, r)$ di centro z_0 contenuto in Ω.

12. Scrivere la serie di Taylor di $f(z) = \frac{1}{(z+1)}$ in $z_0 = 1+i$. Qual è il raggio di convergenza della serie ottenuta?

13. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa e doppiamente periodica, i.e. $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbf{C}$, dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbf{R}$. Allora f è costante.

14. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \le M|z|^n$, con M costante positiva, per ogni $z \in \mathbf{C} \setminus \Delta(0, R)$, $R > 0$. Allora f è un polinomio di grado minore o uguale ad n.

15. Sia f olomorfa e limitata su $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Far vedere che f è costante. (Sugg.: considerare la funzione $g(z) = z^2 f(z)$ e ... cercare di applicare a g l'esercizio precedente).

16. Sia $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \le |e^z|$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Dimostrare che $f(z) = ce^z$, per una costante $c \in \mathbf{C}$.

17. Siano f e g funzioni olomorfe su $\mathbf{C}$, tali che $|f(z)| \le |g(z)|$, per ogni $z \in \mathbf{C}$. Dimostrare che $f(z) = cg(z)$, per una costante $c \in \mathbf{C}$.