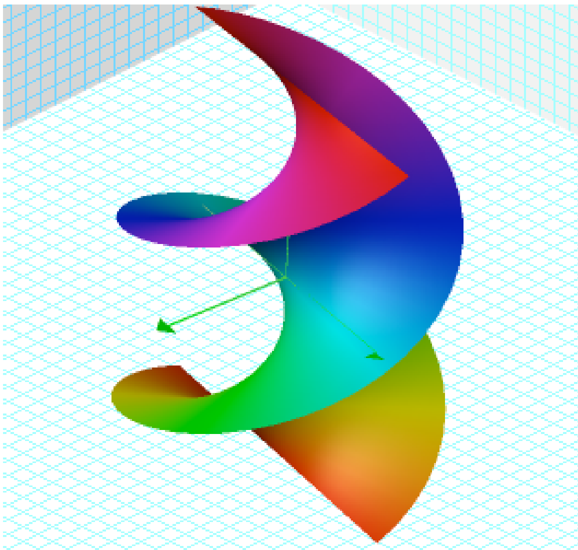
Cenni di geometria differenziale delle superfici.

1. Superfici parametrizzate nello spazio.

Definizione. Una superficie parametrizzata in $\mathbb{R}^3$ è un'applicazione

$$\mathbf{S}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} S_1(u,v) \\ S_2(u,v) \\ S_3(u,v) \end{pmatrix},$$

dove Ω è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ ed $S_1(u,v)$, $S_2(u,v)$, $S_3(u,v)$ sono funzioni a valori reali delle variabili $(u,v) \in \Omega$.



La superficie parametrizzata $\mathbf{S}\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$, data da $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} \sinh 1.6(2v-1)\sin \pi(2u-1) \\ -\sinh 1.6(2v-1)\sin \pi(2u-1) \\ \pi(2u-1) \end{pmatrix}$.

Le funzioni $S_1(u,v)$, $S_2(u,v)$, $S_3(u,v)$ sono le *componenti* della superficie. Per semplicità consideriamo superfici $\mathbf{S}$ le cui componenti sono infinitamente differenziabili. Assumiamo anche che l'applicazione $\mathbf{S}$, ristretta alla parte interna di Ω, sia iniettiva. L'immagine $\mathbf{S}(\Omega)$ dell'applicazione $\mathbf{S}$ è il *supporto* della superficie (a volte comunque per semplicità di linguaggio chiamiamo superficie sia $\mathbf{S}$ che $\mathbf{S}(\Omega)$). Osserviamo che una stessa superficie geometrica in $\mathbb{R}^3$ può essere parametrizzata in diversi modi.

Lo scopo sarà quello di ottenere informazioni sulla geometria della superficie $\mathbf{S}(\Omega)$, a partire dalle funzioni che ne definiscono una parametrizzazione.

2. Curve su una superficie.

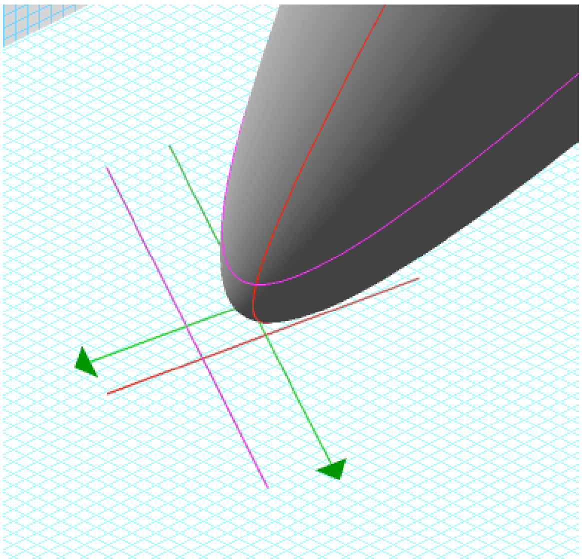
Una curva sulla superficie $\mathbf{S}(\Omega)$ è una curva i cui punti appartengono tutti ad $\mathbf{S}(\Omega)$. Una curva su $\mathbf{S}(\Omega)$ può sempre essere espressa come la composizione di una curva in Ω con l'applicazione $\mathbf{S}$

$$I \to \Omega \to \mathbf{S}(\Omega), \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} S_1(u(t),v(t)) \\ S_2(u(t),v(t)) \\ S_3(u(t),v(t)) \end{pmatrix}.$$

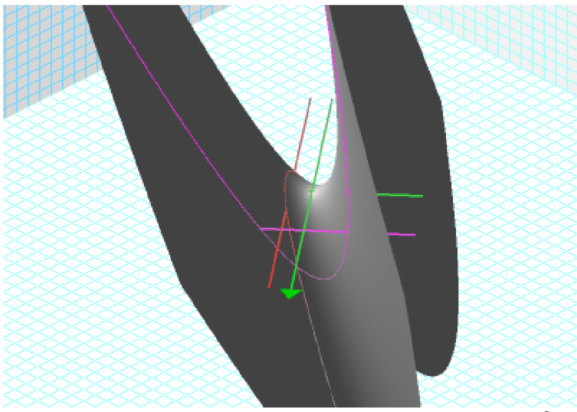
Esempi di curve su $\mathbf{S}(\Omega)$ sono le cosidette *linee coordinate*

$$\mathbf{S}(u, v_0),\ \text{al variare di } u, \qquad \mathbf{S}(u_0, v),\ \text{al variare di } v.$$

Esse sono rispettivamente le immagini tramite $\mathbf{S}$ delle curve in Ω date dall'intersezione di Ω con le rette orizzontali (u, v_0), $u \in \mathbb{R}$, e con le rette verticali (u_0, v), $v \in \mathbb{R}$. Per ogni punto $\mathbf{S}(u_0, v_0)$ sulla superficie, passano due linee coordinate, precisamente $\mathbf{S}(u, v_0)$ ed $\mathbf{S}(u_0, v)$.



Il paraboloide $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$ e le linee coordinate $\begin{pmatrix} u \\ 1 \\ u^2+1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ v \\ 4+v^2 \end{pmatrix}$, per il punto $\mathbf{S}(2,1)$.



L'iperboloide $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix}$ e le linee coordinate $\begin{pmatrix} u \\ 1 \\ u^2-1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ v \\ 4-v^2 \end{pmatrix}$, per il punto $\mathbf{S}(2,1)$.

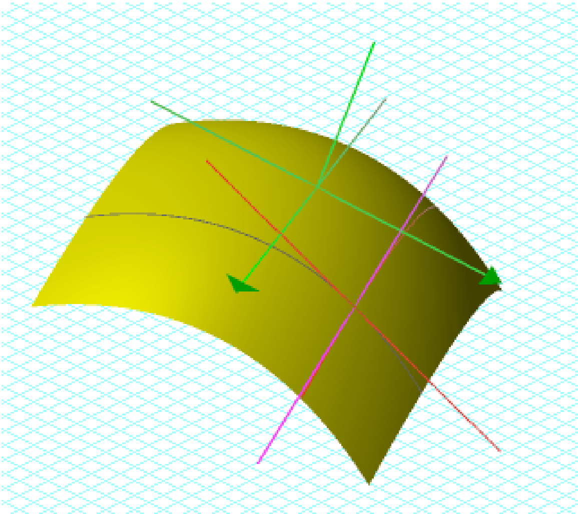
3. Superfici parametrizzate regolari.

Definizione. Una superficie si dice *regolare* se per ogni $(u,v) \in \Omega$ i vettori

$$\mathbf{S}_u(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_v(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial S_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial S_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \tag{1}$$

sono linearmente indipendenti, ossia generano un piano.

Per ogni u_0 fissato, il vettore $\mathbf{S}_u(u_0,v_0)$ è parallelo alla retta tangente alla linea coordinata $\mathbf{S}(u,v_0)$ in $\mathbf{S}(u_0,v_0)$; in modo simile, per ogni v_0 fissato, il vettore $\mathbf{S}_v(u_0,v_0)$ è parallelo alla retta tangente alla linea coordinata $\mathbf{S}(u_0,v)$ in $\mathbf{S}(u_0,v_0)$.



Le rette tangenti alle linee coordinate passanti per un punto $P = \mathbf{S}(u_0,v_0)$.

Sia γ una curva su $\mathbf{S}(\Omega)$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} S_1(u(t),v(t)) \\ S_2(u(t),v(t)) \\ S_3(u(t),v(t)) \end{pmatrix}.$$

Per le regole di derivazione di funzioni composte, vale

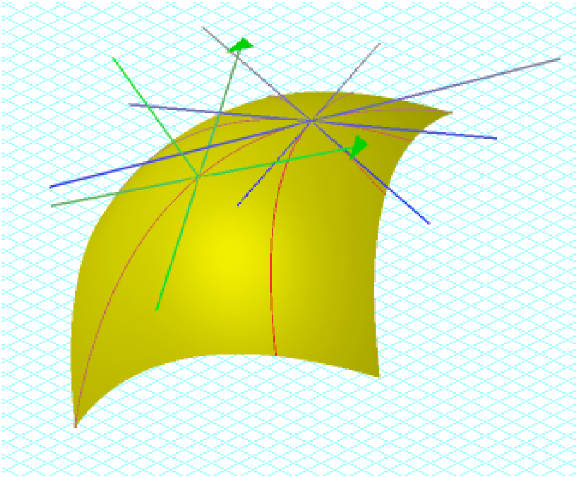
$$\frac{d}{dt}S_i(u(t),v(t)) = \frac{\partial S_i}{\partial u}(u(t),v(t))u'(t) + \frac{\partial S_i}{\partial v}(u(t),v(t))v'(t), \quad i = 1,2,3,$$

e il vettore tangente a γ in $\gamma(t)$ risulta

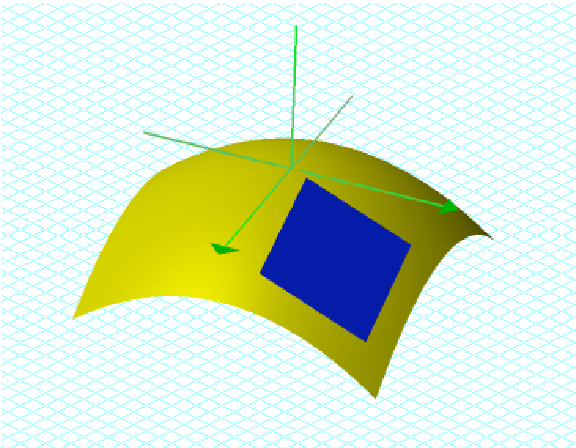
$$\gamma'(t) = u'(t)\mathbf{S}_u(u(t),v(t)) + v'(t)\mathbf{S}_v(u(t),v(t)). \tag{2}$$

In altre parole, al variare di t, il vettore tangente $\gamma'(t)$ è combinazione lineare di $\mathbf{S}_u(u(t),v(t))$ e $\mathbf{S}_v(u(t),v(t))$, con coefficienti $u'(t)$ e $v'(t)$.

Il *piano tangente* alla superficie $\mathbf{TS}(u_0,v_0)$ in un punto $\mathbf{S}(u_0,v_0)$ è il piano costituito dalle rette tangenti in $\mathbf{S}(u_0,v_0)$ a tutte le curve su $\mathbf{S}$ passanti per $\mathbf{S}(u_0,v_0)$.



Le rette tangenti alle curve su $\mathbf{S}$ passanti per un punto $P = \mathbf{S}(u_0, v_0)$.



Il piano tangente ad $\mathbf{S}$ in un punto $P = \mathbf{S}(u_0, v_0)$.

In forma parametrica è dato da

$$\mathbf{S}(u_0, v_0) + \mathrm{Span}\{\mathbf{S}_u(u_0, v_0), \mathbf{S}_v(u_0, v_0)\}.$$

Il *versore normale* a tale piano è per definizione

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \frac{\mathbf{S}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{S}_v(u_0, v_0)}{\|\mathbf{S}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{S}_v(u_0, v_0)\|}.$$

4. Prima forma fondamentale di una superficie.
Sia

$$\mathbf{S}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} S_1(u,v) \\ S_2(u,v) \\ S_3(u,v) \end{pmatrix}$$

una superficie parametrizzata regolare in $\mathbb{R}^3$. Per ogni punto $\mathbf{S}(u,v) \in \mathbf{S}(\Omega)$, la restrizione del prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ al piano

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{S}_u(u,v), \mathbf{S}_v(u,v)\}$$

definisce su di esso una forma bilineare simmetrica definita positiva. Questa forma esprime il prodotto scalare $X \cdot Y$ tra due vettori X, $Y \in \mathrm{Span}\{\mathbf{S}_u(u,v), \mathbf{S}_v(u,v)\}$ in funzione delle loro coordinate nella base $\{\mathbf{S}_u(u,v), \mathbf{S}_v(u,v)\}$. Infatti, se scriviamo $X = x_1\mathbf{S}_u + x_2\mathbf{S}_v$ e $Y = y_1\mathbf{S}_u + y_2\mathbf{S}_v$, per le proprietà di bilinearità e di simmetria del prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$, troviamo

$$\begin{aligned} X \cdot Y = (x_1\mathbf{S}_u + x_2\mathbf{S}_v) \cdot (y_1\mathbf{S}_u + y_2\mathbf{S}_v) &= x_1y_1\,\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u \;+\; x_2y_2\,\mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v \;+\; (x_1y_2 + x_2y_1)\,\mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v = \\ &= (\,x_1 \quad x_2\,) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti della matrice simmetrica $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ sono dati da

$$E = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_u = \|S_u\|^2, \qquad G = \mathbf{S}_v \cdot \mathbf{S}_v = \|S_v\|^2, \qquad F = \mathbf{S}_u \cdot \mathbf{S}_v.$$

Tali coefficienti dipendono da (u,v). Similmente, la norma di un vettore $X \in \mathrm{Span}\{\mathbf{S}_u(u,v), \mathbf{S}_v(u,v)\}$ è data dalla forma quadratica definita positiva

$$X \cdot X = (\,x_1 \quad x_2\,) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ex_1^2 + Gx_2^2 + 2Fx_1x_2, \tag{3}$$

e il coseno dell'angolo fra X e Y è dato da

$$\cos\widehat{XY} = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|} = \frac{x_1y_1E + x_2y_2G + (x_1y_2 + x_2y_1)F}{\sqrt{Ex_1^2 + Gx_2^2 + 2Fx_1x_2}\sqrt{Ey_1^2 + Gy_2^2 + 2Fy_1y_2}}.$$

La matrice simmetrica, funzione del punto $\mathbf{S}(u,v)$,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

è chiamata la *prima forma fondamentale* della superficie $\mathbf{S}$.
Tutte le misurazioni sulla superficie $\mathbf{S}(\Omega)$, quali lunghezze di curve, angoli fra vettori tangenti e aree di regioni, possono essere espresse in termini dei suoi coefficienti.

Ricordiamo che data una curva sulla superficie

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} S_1(u(t), v(t)) \\ S_2(u(t), v(t)) \\ S_3(u(t), v(t)) \end{pmatrix},$$

le coordinate del vettore tangente a γ in un punto $\mathbf{S}(u(t), v(t))$, relative alla base $\{S_u(u(t), v(t)), S_v(u(t), v(t))\}$, sono date da $u'(t), v'(t)$ (vedi formule (2)).
Ne segue ad esempio che le linee coordinate per un punto $\mathbf{S}(u(t), v(t))$ sono ortogonali fra loro se e solo se per quel valore di t vale $F(u(t), v(t)) = 0$. Inoltre, la lunghezza di un arco di curva sulla superficie è dato da

$$\begin{aligned} L_\gamma([a,b]) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + G(v'(t))^2 + 2Fu'(t)v'(t)}\, dt \end{aligned}$$

dove E, F e G sono funzioni di $(u(t), v(t))$, con $t \in [a,b]$.

5. Curvatura normale di una curva su una superficie.

Sia $\mathbf{S}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare, sia $P = \mathbf{S}(u_0, v_0)$ un punto su $\mathbf{S}(\Omega)$. Vogliamo determinare la "forma" della superficie $\mathbf{S}(\Omega)$ nell'intorno di P analizzando le curve su $\mathbf{S}(\Omega)$ passanti per P. Non possiamo aspettarci che curve qualsiasi ci diano informazioni sulla "forma" della superficie che le contiene. Basta pensare che un piano in $\mathbb{R}^3$ contiene curve con curvatura arbitraria. Per ottenere informazioni sulla forma di $\mathbf{S}(\Omega)$ nelle vicinanze di P, dobbiamo considerare *sezioni normali di* $\mathbf{S}(\Omega)$ *in* P, ossia curve ottenute tagliando $\mathbf{S}(\Omega)$ con piani ortogonali ad $\mathbf{S}$ in P (ossia ortogonali al piano tangente ad $\mathbf{S}(\Omega)$ in P). Le sezioni normali sono caratterizzate dal fatto che il loro piano osculatore in P è ortogonale ad $\mathbf{S}$ in P.

Facciamo ciò nel modo seguente. Sia γ una curva su $\mathbf{S}(\Omega)$

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \gamma_1(s) \\ \gamma_2(s) \\ \gamma_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(u(s), v(s)) \\ S_2(u(s), v(s)) \\ S_3(u(s), v(s)) \end{pmatrix}, \quad s \in I,$$

passante per P, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Poiché γ è in particolare una curva dello spazio, possiamo calcolare la sua curvatura in P mediante le formule

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \kappa(s) = \|\gamma''(s)\|.$$

Decomponiamo il vettore $\gamma''(s_0)$ come combinazione lineare di $\mathbf{S}_u(P), \mathbf{S}_v(P), \mathbf{N}(P)$

$$\gamma''(s_0) = \kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0) = \kappa_N(s_0)\mathbf{N}(P) + \lambda\mathbf{S}_u(P) + \mu\mathbf{S}_v(P)$$

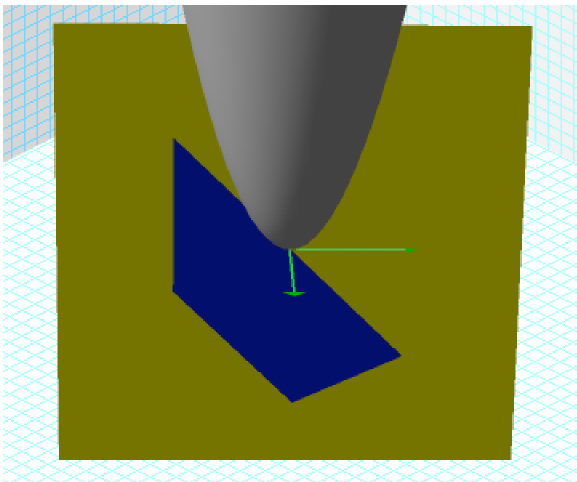
e consideriamo la sua proiezione $\kappa_N(s_0)\mathbf{N}(P)$ sul versore normale alla superficie in P.

Definizione. La quantità $\kappa_N(s_0)$ è per definizione la *curvatura normale* di γ in P.

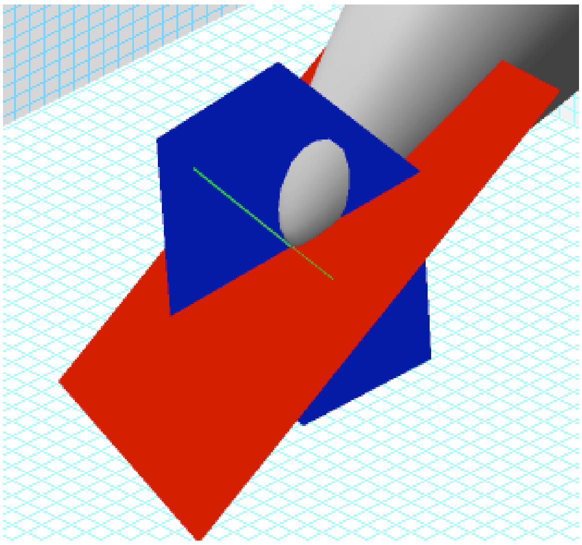
Poiché i vettori $\mathbf{S}_u(P), \mathbf{S}_v(P)$ sono perperndicolari a $\mathbf{N}(P)$, risulta

$$\kappa_N(s_0) = \kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0) \cdot \mathbf{N}(P) = \kappa(s_0)\cos\theta,$$

dove θ è l'angolo formato dai versori $\mathbf{n}(s_0)$ e $\mathbf{N}(P)$. Ne segue in particolare che la curvatura normale è minore o uguale della curvatura standard di γ in P. Inoltre, curvatura normale e curvatura standard di una curva γ in un punto P coincidono se e solo se in quel punto il versore normale alla curva e il versore normale alla superficie coincidono.



Una sezione normale del paraboloide $\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$ in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Una sezione non normale del paraboloide $\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$ in $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il prossimo teorema ci garantisce che, considerando la curvatura normale delle curve su $\mathbf{S}(\Omega)$ passanti per P, di fatto stiamo considerando le sezioni normali di $\mathbf{S}(\Omega)$ in P.

Teorema (Meusnier). *Tutte le curve su una superficie $\mathbf{S}(\Omega)$, passanti per un punto P ed aventi in P lo stesso vettore tangente $\mathbf{v}$, hanno la stessa curvatura normale in P. Tale curvatura normale coincide con la curvatura di una sezione normale ottenuta tagliando $\mathbf{S}(\Omega)$ con un piano per P, parallelo a* $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}, \mathbf{N}(P)\}$.

6. Seconda forma fondamentale di una superficie.

Rispetto ad una parametrizzazione qualunque, la curvatura normale di una curva

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(u(t),v(t)) \\ S_2(u(t),v(t)) \\ S_3(u(t),v(t)) \end{pmatrix}$$

su $\mathbf{S}(\Omega)$ in $P=\gamma(t_0)$ risulta

$$\kappa_N(\gamma,P) = \frac{\gamma''(t_0)\cdot\mathbf{N}(P)}{\|\gamma'(t_0)\|^2}. \tag{4}$$

Derivando le formule (2) rispetto a t troviamo

$$\gamma''(t_0) = S_{uu}(u'(t_0))^2 + S_{vv}(v'(t_0))^2 + 2S_{uv}u'(t_0)v'(t_0) + S_u u''(t_0) + S_v v''(t_0), \tag{5}$$

dove le derivate S_u, S_v, $S_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}S_u$, ...etc...sono tutte calcolate in $(u(t_0),v(t_0))$. Sostituendo le formule (3) e (5) nell'espressione (4), troviamo che al variare di γ la curvatura normale in P è data da

$$\kappa_N(\gamma,P) = \frac{e(u')^2 + g(v')^2 + 2fu'v'}{E(u')^2 + G(v')^2 + 2Fu'v'}$$

dove

$$e = S_{uu}(u(t_0),v(t_0))\cdot\mathbf{N}(P), \quad g = S_{vv}(u(t_0),v(t_0))\cdot\mathbf{N}(P), \quad f = S_{uv}(u(t_0),v(t_0))\cdot\mathbf{N}(P)$$

e per semplicita' abbiamo scritto u' e v' al posto di $u'(t_0)$ e $v'(t_0)$. La funzione $\kappa_N(\gamma,P)$ è data dal rapporto tra due forme quadratiche, di cui quella al denominatore è definita positiva. Dunque il segno di $\kappa_N(\gamma,P)$ dipende esclusivamente dal segno della forma quadratica al numeratore.

La matrice simmetrica, funzione del punto $\mathbf{S}(u, v)$,

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

è chiamata la *seconda forma fondamentale* della superficie $\mathbf{S}$.

Il segno di questa forma si riflette direttamente sulla geometria di $\mathbf{S}$.

Definizione. Un punto P su una superficie $\mathbf{S}$ si dice *ellittico*, *iperbolico* o *parabolico* se la seconda forma fondamentale di $\mathbf{S}$ in P è rispettivamente *definita, indefinita o semidefinita.*
Un punto P si dice *planare* se la seconda forma fondamentale di $\mathbf{S}$ in P è identicamente nulla, ossia se $e = f = g = 0$ in P. Infine un punto P si dice si dice *umbilicale* se tutte le curve per P hanno la stessa curvatura normale (non nulla), ossia se $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$ in P.

Osservazione. Tutte le curve passanti per un punto ellittico hanno la concavità rivolta dalla stessa parte. I punti di un ellissoide sono tutti punti ellittici. I punti di una sfera sono tutti punti ellittici e sono anche umbilicali.
Fra le curve passanti per un punto iperbolico ce ne sono almeno due con la concavità rivolta dalla parte opposta. I punti di una sella o di un iperboloide ad una falda sono tutti punti iperbolici.
I punti di un piano in $\mathbb{R}^3$ sono tutti planari.
I punti di un cilindro circolare sono tutti parabolici.

Concludiamo la sezione con un teorema dal quale risulta che la prima e la seconda forma fondamentale di una superficie in $\mathbb{R}^3$ sono la generalizzazione della curvatura e della torsione di una curva in $\mathbb{R}^3$.

Teorema (Teorema fondamentale della teoria delle superfici dello spazio). *Siano date E, F, G, e, f, g funzioni differenziabili definite su un dominio Ω di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che E e G siano positive, che la forma quadratica $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ sia definita positiva e che E, F, G, e, f, g soddisfino le condizioni di compatibilità di Gauss e Codazzi-Mainardi. Allora per ogni $(u_0, v_0) \in \Omega$ esistono un intorno U di (u_0, v_0) e una superficie $\mathbf{S}\colon U \to \mathbb{R}^3$ le cui forme quadratiche fondamentali sono date rispettivamente da $\left(\begin{smallmatrix} E & F \\ F & G \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} e & f \\ f & g \end{smallmatrix}\right)$. Tale superficie è unica, a meno di movimenti rigidi dello spazio.*

Curvature principali e linee di curvatura.

Consideriamo di nuovo la funzione che esprime la curvatura normale delle curve su una superficie passanti per un punto P

$$\kappa_N(\gamma, P) = \frac{e(u')^2 + g(v')^2 + 2fu'v'}{E(u')^2 + G(v')^2 + 2Fu'v'}.$$

Osserviamo che κ_N è una funzione omogenea di grado zero in (u', v'), ossia assume lo stesso valore su tutti i multipli non nulli di un dato (u', v') :

$$\kappa_N(u', v') = \kappa_N(\lambda u', \lambda v'), \qquad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{6}$$

Geometricamente questo significa che la curvatura normale di una curva γ non dipende né dalla velocità né dal verso con cui è percorsa su $\mathbf{S}$. Dalla (6) segue che $\kappa_N(u', v')$ assume tutti i suoi valori sulla sfera unitaria $\{(u', v') \mid \|(u', v')\| = 1\}$. Poiché κ_N è continua e la sfera è compatta, vale il seguente fatto:

Al variare di (u', v'), la curvatura normale $\kappa_N(\gamma, P)$ ha massimo e minimo. Il massimo κ_2 e il minimo κ_1 della curvatura normale sono chiamate le curvature principali della superficie in P.

In un punto umbilicale e in un punto planare, valgono rispettivamente $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$ e $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. In un punto ellittico, κ_1 e κ_2 sono distinti, non nulli e dello stesso segno; in un punto iperbolico, κ_1 e κ_2 sono distinti, non nulli e di segno opposto; in un punto parabolico, κ_1 e κ_2 sono distinti ed uno di essi è zero.

In un punto P non planare e non umbilicale, due curve su cui la curvatura normale in P assume rispettivamente il massimo e il minimo, si tagliano perpedicolarmente in P. In altre parole, le rispettive tangenti in P sono perpendicolari fra loro. Sono chiamate direzioni principali o tangenti di curvatura in P.

Le curve su $\mathbf{S}$ le cui tangenti in ogni punto sono tangenti di curvatura sono chiamate linee di curvatura.

Esempio. Sia $\mathbf{S}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare le cui forme quadratiche fondamentali sono diagonali in ogni punto, ossia

$$F(u, v) = f(u, v) = 0, \qquad \forall (u, v) \in \Omega.$$

Allora le linee di curvatura di $\mathbf{S}$ sono le linee coordinate $\mathbf{S}(u, v_0)$ e $\mathbf{S}(u_0, v)$, al variare di $(u_0, v_0) \in \Omega$. (Vedi Esercizio 2 ed Esercizio 3, del Foglio 6 di esercizi svolti).

Definizione. La *curvatura di Gauss* e la *curvatura media* della superficie in P sono date rispettivamente da

$$K = \kappa_1 \kappa_2, \qquad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2).$$

In termini dei coefficienti delle forme quadratiche fondamentali della superficie, la curvatura di Gauss e la curvatura media sono date da

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{gE - 2fF + eG}{2(EG - F^2)}.$$

In un punto ellittico, la curvatura di Gauss è positiva; in un punto iperbolico, la curvatura di Gauss è negativa; in un punto parabolico o in un punto planare, la curvatura di Gauss è nulla.

Teorema Egregium (Gauss, 1777-1855).