1. Sia A la matrice 3×3 data da
$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$
   (i) Far vedere che l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da $X \mapsto AX$ è ortogonale.
   (ii) Calcolare autovalori ed autospazi di L_A.
   (iii) Far vedere che, geometricamente, L_A è una rotazione intorno alla retta $\{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{R}\}$.
   (iv) Determinare un piano $U \subset \mathbf{R}^3$ che sia mandato in sè dall'azione da L_A.
   (v) Far vedere che l'angolo φ della rotazione soddisfa $\cos(\varphi) = 1/3$.

2. Sia A la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (i) Calcolare il polinomio caratteristico di A.
   (ii) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di A.

3. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche M, determinare una matrice ortogonale A, con determinante uguale a uno che la diagonalizzi, ossia tale che $A^{-1}MA = D$, con D matrice diagonale:
$$M = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

4. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche M, determinare una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di M. Determinare una matrice ortogonale C tale che $C^{-1}MC$ sia una matrice diagonale.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. "Sperimentando" con vari vettori X determinare il segno delle seguenti forme quadratiche
$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 8x_1x_2 - 3x_2^2, \quad q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2, \quad q(x_1, x_2) = 6x_1x_2.$$
$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3, \quad q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3, \quad q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2.$$

6. Per ognuna delle seguenti forme quadratiche scrivere la matrice simmetrica associata, e determinare un cambiamento di coordinate ortogonale $X = AY$ in modo che nelle coordinate Y la forma non abbia termini misti
   (i) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$;
   (ii) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_3^2$;
   (iii) $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2$.

7. Sia $Q(X) = {}^tXMX$ una forma quadratica, dove M è una matrice simmetrica $n \times n$.
(i) Verificare che se X_0 è un autovettore di M di autovalore λ, allora $Q(X_0) = \lambda \|X_0\|^2$.
(ii) Sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$ formata da autovettori di M e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i rispettivi autovalori. Verificare che se un vettore X_0 è dato da $X_0 = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$, allora
$$Q(X_0) = \lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_n a_n^2.$$