

(1) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(i) Trovare le formule per la traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .

(ii) Calcolare  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(iii) Calcolare  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(iv) Calcolare  $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

(2) Sia  $A$  la matrice  $3 \times 3$  data da

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che  $A$  è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di  $A$ .

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $X \mapsto AX$ .

(3) Sia  $A$  la matrice  $3 \times 3$  data da

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che  $A$  è una matrice ortogonale.

(ii) Calcolare autovalori e autospazi di  $A$ .

(iii) Interpretare geometricamente l'isometria  $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $X \mapsto AX$ .

(4) Sia  $C$  il cubo in  $\mathbf{R}^3$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(ii) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(iii) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la rotazione  $R_{3\pi/2}$  intorno al vettore  $\mathbf{e}_3$ ?

(iv) Quali sono i vertici di  $C$  dopo la dilatazione  $D_{1,3,2}$ ?

(v) Quali sono i vertici di  $C$  dopo l'omotetia  $D_3$ ?

(vi) Quali sono i vertici di  $C$  dopo lo shear  $N_{1,0,3}$ ?

(5) Sia  $C$  il cubo in  $\mathbf{R}^3$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $\mathbf{e}_3$ .
- (ii) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $\mathbf{e}_1$ .
- (iii) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$  intorno a  $-\mathbf{e}_1$ .
- (iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?
- (v) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo la dilatazione  $D_{1,3,2}$ ?
- (vi) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo l'omotetia  $D_3$ ?
- (vii) Disegnare l'immagine di  $C$  dopo lo shear  $N_{1,0,3}$ ?

(6) Sia  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ .

- (i) Trovare le formule per la rotazione  $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$  di un angolo  $\pi/2$  intorno a  $\mathbf{v}$ .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione  $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$  di un angolo  $-\pi/4$  intorno a  $\mathbf{v}$ .
- (iii) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R_{\pi/2, \mathbf{v}}$  a  $l$ .

- (iv) Sia  $\pi$  il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando  $R_{-\pi/4, \mathbf{v}}$  a  $\pi$ .

- (7) Sia  $\pi$  il piano di equazione  $x_1 + 2x_2 = 0$ .
- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a  $\pi$ .
  - (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (8) Sia  $C$  il cubo dell'Eserc.4. Calcolare l'immagine di  $C$  dopo la riflessione rispetto
- (i) al piano  $(x_1, x_2)$ .
  - (ii) al piano  $(x_2, x_3)$ .
  - (iii) al piano di equazione  $x_1 = x_2$ .

- (9) Sia  $C$  il cubo dell'Eserc.5. Calcolare l'immagine di  $C$  dopo la riflessione rispetto
- (i) al piano  $(x_1, x_2)$ .
  - (ii) al piano  $(x_2, x_3)$ .
  - (iii) al piano di equazione  $x_1 = x_2$ .
  - (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\pi$  che mandano  $C$  in se stesso.

(10) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare la formula per la riflessione  $U_{\mathbf{p}}$  rispetto al punto  $\mathbf{p}$ .
- (ii) Calcolare la formula per la riflessione  $U_{\mathbf{q}}$  rispetto al punto  $\mathbf{q}$ .
- (iii) Calcolare le formule per la trasformazione  $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$  e per  $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$ .
- (iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni  $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$  e  $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$ ?

(11) Sia  $\pi$  il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia  $\pi'$  il piano di equazione  $x_3 = 0$ .

- (i) Trovare le formule della riflessione  $S_\pi$  rispetto a  $\pi$ .
- (ii) Calcolare le formule della riflessione  $S_{\pi'}$  rispetto a  $\pi'$ .
- (iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$

(12) Sia  $D_{2,5,3}$  la dilatazione data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu,\rho}$  tale che  $D_{\lambda,\mu,\rho} \circ D_{2,5,3}$  sia l'applicazione identica.
- (ii) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu,\rho}$  tale che  $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda,\mu,\rho}$  sia l'applicazione identica.

- (13) Dimostrare che una dilatazione  $D_{\lambda,\mu,\rho}$  conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se  $\lambda = \mu = \rho$ .
- (14) Determinare l'inversa della trasformazione (shear)  $N_{1,1,1}$ .