1. Siano dati i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3.$$
   (i) Far vedere che formano una base di $\mathbf{R}^3$.
   (ii) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
   (iii) Calcolare le coordinate del vettore $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base ortonormale così ottenuta.

2. Ortonormalizzare i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4.$$
   Spiegare il risultato.

3. Dati i vettori
$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix},$$
   calcolare e confrontare $X \cdot Y$, $||X||^2$, $||Y||^2$, e $||X+Y||^2$. Spiegare il risultato.

4. Sia dato il piano $\pi \quad x + y - z = 0$ in $\mathbf{R}^3$. Siano $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare una base ortonormale di π.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale di P su π.
   (iii) Determinare la proiezione ortogonale su π della retta per P e Q.

5. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. Descrivere l'insieme
$$\{X \in \mathbf{R}^2 \mid X \cdot P = 0\}.$$

6. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Descrivere l'insieme
$$\{X \in \mathbf{R}^3 \mid X \cdot P = 0\}.$$

7. Sia data la retta $r \quad x - 3y = 0$ in $\mathbf{R}^2$. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare il complemento ortogonale $r^\perp$.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
   (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

8. Sia dato il piano $\alpha \quad x+y-z=0$ in $\mathbf{R}^3$. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare il complemento ortogonale $\alpha^\perp$.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_\alpha(P)$.
   (iii) Determinare la distanza $d(P, \alpha^\perp)$.

9. Sia data la retta $r \quad \begin{cases} x-3y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ in $\mathbf{R}^3$. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare il complemento ortogonale $r^\perp$.
   (ii) Determinare la proiezione ortogonale $\pi_r(P)$.
   (iii) Determinare la distanza $d(P, r^\perp)$.

10. Sia
$$U = span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbf{R}^4.$$
   (i) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$.
   (ii) Determinare le proiezioni ortogonali $\pi_U(P)$ e $\pi_{U^\perp}(P)$ di P su U e $U^\perp$ rispettivamente.
   (iii) Calcolare $\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P)$.
   (iv) Calcolare la distanza del punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da U e da $U^\perp$.

11. Controllare se i vettori
$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$$
formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

12. Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ il cui primo vettore sia $P/||P||$. In quanti modi si puo' fare?

13. Sia M una matrice $n \times n$ le cui colonne sono un insieme di vettori ortonormali. Spiegare perché M è invertibile.

14. Sia U un sottospazio di $\mathbf{R}^n$ e sia $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base ortogonale di U. Sia $U^\perp$ il suo complemento ortogonale e sia $\{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ una base ortogonale di $U^\perp$.
   (i) Far vedere che $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ è un insieme di vettori ortogonali.
   (ii) Far vedere che sono una base di $\mathbf{R}^n$.