1. Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 2 in $\mathbf{R}^2$.
   (a) Determinare l'equazione di $S(\mathcal{C})$, dove S è la riflessione rispetto alla retta verticale $x_1 = 2$.
   (b) Determinare l'equazione di $S(\mathcal{C})$, dove S è la riflessione rispetto alla retta $x_1 = x_2$.

2. Siano dati i punti $F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ e sia $E = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - F_1\| + \|\mathbf{x} - F_2\| = 4\}$ un'ellisse di fuochi F_1 ed F_2. Sia $T_\mathbf{p}$ la traslazione di passo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sia R_θ la rotazione di angolo $\theta = \pi/4$ intorno all'origine.
   (a) Determinare i fuochi dell'ellisse $T_\mathbf{p}(E)$.
   (b) Determinare l'equazione dell'ellisse $R_\theta(E)$ (impostare l'equazione, senza completare il calcolo).

3. Sia A la matrice 3×3 data da
$$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$
   (i) Far vedere che l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da $X \mapsto AX$ è un'isometria.
   (ii) Calcolare autovalori ed autospazi di L_A.
   (iii) Far vedere che, geometricamente, L_A è una rotazione intorno alla retta $\{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{R}\}$.
   (iv) Determinare un piano $U \subset \mathbf{R}^3$ che sia mandato in sè dall'azione da L_A.
   (v) Far vedere che l'angolo φ della rotazione soddisfa $\cos(\varphi) = 1/3$.

4. Determinare per quali delle seguenti matrici l'applicazione $L_A(X) = AX$ definisce un'isometria lineare:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Per quelle che definiscono un'isometria determinare autovalori e autospazi: in base ad essi provare a darne un'interpretazione geometrica.

5. Verificare (geometricamente e algebricamente) i seguenti fatti in $\mathbf{R}^2$:
   (a) Sia $T_\mathbf{p}$ la traslazione di passo $\mathbf{p}$. Allora $T_\mathbf{p} \circ T_\mathbf{q} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{q}}$, $\quad T_\mathbf{p}^{-1} = T_{-\mathbf{p}}$, $\quad T_\mathbf{O} = Id$.
   (b) Sia R_θ la rotazione di angolo θ. Allora $R_\theta \circ R_\phi = R_{\theta+\phi}$, $\quad R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$, $\quad R_0 = Id$.
   (c) Sia S_θ la riflesione rispetto alla retta per l'origine che forma un angolo $\theta/2$ col semiasse delle ascisse positive. Allora $S_\theta \circ S_\phi = R_{\theta+\phi}$, $\quad S_\theta \circ S_\theta = Id$.