Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Energetica, dei Modelli e dei Sistemi

Secondo esonero - Esame di Geometria 1/ Algebra Lineare 23 novembre 2007

COGNOME... NOME............................ N.MATRICOLA....................
CORSO DI STUDI....................................

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE NELLO SPAZIO ASSEGNATO. VANNO CONSEGNATO SOLO QUESTI FOGLI. SCRIVERE IL PROPRIO NOME SU CIASCUN FOGLIO.

1) Si consideri l'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Determinare la dimensione ed una base sia per Ker g che per Im g.

b) Discutere se $\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a Im g.

Soluzione a) La matrice A ha rango 2, ammettendo come forma ridotta a scala la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne deduco che Im g, che coincide con il sottospazio generato dalle colonne, ha dimensione 2 uguale al rango di A, ed ammette come base $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, ricavata scegliendo una coppia di colonne di A tra loro linearmente indipendenti.

Il nucleo di g coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo avente A come matrice dei coefficienti, ed ha dunque dimensione $4 - rg(A) = 4 - 2 = 2$. Una base di Ker g è data da $(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, ricavata risolvendo il sistema ridotto di matrice A'.

b) Il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a Im g se e solo se è combinazione lineare della base di Im g, se e solo se $rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Poiche' una forma ridotta della matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, il vettore $\mathbf{v}$ appartiene a Im g.

Altri dati: se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, Im g ha dimensione 2 e base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ mentre Ker g ha dimensione 2 e base $(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$. Il vettore non appartiene a Im g.

2) In $\mathbf{R}^3$ sia fissata la base $\mathcal{B}$ data dai vettori $\overline{v}_1 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$, $\overline{v}_2 = \overline{e}_1 + \overline{e}_3$, $\overline{v}_3 = -\overline{e}_1 - 2\overline{e}_3$, ove con $\mathcal{E} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ si denoti la base canonica. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(\overline{v}_1) = \overline{v}_1 + \overline{v}_2$, $f(\overline{v}_2) = 2\overline{v}_1 - \overline{v}_2$, $f(\overline{v}_3) = -\overline{v}_2 + \overline{v}_3$.

a) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in dominio e codominio).

b) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ (in dominio e codominio).

Soluzione a) La matrice richiesta si costruisce prendendo ordinatamente per colonne le componenti, in base $\mathcal{B}$, di $f(\overline{v}_1)$, $f(\overline{v}_2)$, $f(\overline{v}_3)$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice cercata si può ottenere come prodotto $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id)$, ove

- $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ rappresenta l'identità rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e la base canonica del codominio e le cui colonne costituiscono le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base canonica.;
- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = [M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

Il prodotto $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1/2 & -3 \end{pmatrix}$ può essere calcolato più semplicemente osservando che le sue colonne sono le componenti (rispettivamente) di $f(\overline{v}_1), f(\overline{v}_2), f(\overline{v}_3)$ in base canonica. Svolgendo i conti, si trova che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & -3 & -4 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

.

Altri dati: per $\mathcal{B} = \{\overline{v}_1 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2, \overline{v}_2 = \overline{e}_1 - \overline{e}_3, \overline{v}_3 = \overline{e}_1 - 2\overline{e}_3\}$, e $f(\overline{v}_1) = \overline{v}_1 - \overline{v}_3$, $f(\overline{v}_2) = \overline{v}_2 + \overline{v}_3$, $f(\overline{v}_3) = \overline{v}_1 - \overline{v}_3$, si ricava: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$; $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -8 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

COGNOME.. NOME............................ N.MATRICOLA...................

3) Per ogni $a \in \mathbf{R}$, sia assegnato in $\mathbf{R}^3$ l'endomorfismo f_a la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 4 & a^2+1 & a+1 \\ 8 & 4 & a^2+3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare per quali valori del parametro reale a l'applicazione f_a è iniettiva. Per i valori del parametro a per i quali f_a non è iniettiva, determinare la dimensione di Ker f_a.

b) Determinare la dimensione ed una base del nucleo della composizione $f_0 \circ f_1$.

Soluzione a) La matrice A ha rango uguale al rango della matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$$

da essa ricavata mediante operazioni elementari. Dunque A ha rango 3 per $a \neq 1$ e dunque f_a è iniettiva se e solo se $a \neq 1$. Per $a = 1$, la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 1; la dimensione di Ker f_1 è 2 e una sua base (che verrà utilizzata per la risposta alla parte b)) è data da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\}$, (ottenuta risolvendo una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo avente A' come matrice dei coefficienti). Per $a = -1$, la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango 2; la dimensione di Ker f_{-1} è $3 - 2 = 1$.

b) Poiché f_0 è iniettiva per quanto osservato nella risposta precedente, si può concludere che f_0 è un isomorfismo e che Ker $f_0 \circ f_1 =$ Ker f_1 (già trovato).

Altri dati: per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2-a & 1 \\ 0 & a & a \\ a-1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

l'applicazione f_a è iniettiva per $a \neq 0, 1$. Per $a = 0$, Ker $f_0 =$ Ker $f_{-1} \circ f_0$ ha dimensione 2 e una sua base è data da $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Per $a = 1$, Ker f_1 ha dimensione 1.

4) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare associata, rispetto alla base canonica in dominio e codominio, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & 8 & 2 \\ 42 & -21 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori di f e, per ciascuno di essi, determinare una base del relativo autospazio.

b) Discutere se f è diagonalizzabile. In caso positivo, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ ed una matrice diagonale D tali che D sia la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ (in dominio e codominio).

Soluzione a) Il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$. L'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 1 e dunque molteplicità geometrica 1 (che è la dimensione dell'autospazio corrispondente). Una base dell'autospazio V_2 relativo all'autovalore 2 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -14 & 6 & 2 \\ 42 & -21 & -7 \end{pmatrix}$; poiché $A - 2I$ ha rango 2, si ha che dim V_2=3-2=1 e base $\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\}$.

L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2. Una base dell'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1 si ottiene risolvendo il sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $A-I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -14 & 7 & 2 \\ 42 & -21 & -6 \end{pmatrix}$; poiché $A - I$ ha rango 1, si ha che dim V_1=3-1=2 e base $\{\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\}$.

b) Poiché il polinomio caratteristico di A si fattorizza in fattori lineari a coeffficienti reali e, per ogni autovalore, le molteplicità algebrica e geometrica coincidono, l'applicazione f risulta diagonalizzabile. Rispetto alla base di autovettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ l'applicazione f è rappresentata dalla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Altri dati: Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 12 & \sqrt{3} & 1 \\ 42 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, l'applicazione f risulta non diagonalizzabile, con autovalori 2 (con molteplicità algebrica 2 e geometrica 1, e base dell'autospazio data da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$) e -2 (con molteplicità algebrica e geometrica 1, e base dell'autospazio data da $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$).