Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Energetica, dei Modelli e dei Sistemi

Esame di Geometria (Prof. F. Tovena) ottobre 2007

Esercizi di ripasso relativi al programma delle prime 4 settimane.

1) Nel piano affine euclideo $\mathcal{A}^2$ sia fissato un punto O e si denoti con $\mathcal{V}^2_O$ l'insieme dei vettori del piano applicati in O. Sia $\mathcal{B} = \{\bar{\imath} = \overline{OA_1}, \bar{\jmath} = \overline{OA_2}\}$ una base di $\mathcal{V}^2_O$ e si fissi in $\mathcal{A}^2$ il riferimento affine $RA(O, \bar{\imath}, \bar{\jmath})$.

Siano fissati inoltre i punti $A(3, -1)$ e $B(1, 1)$ ed il vettore $\mathbf{v} = 2\bar{\imath} - 5\bar{\jmath}$.

a) Determinare l'equazione parametrica della retta r passante per A e per B.

b) Determinare l'equazione cartesiana della retta s passante per A e ortogonale al vettore $\mathbf{v}$.

c) Denotando con $\tau_{\mathbf{v}} : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}^2$ la traslazione di vettore $\mathbf{v}$, determinare una equazione cartesiana per la retta r' passante per $A' = \tau_{\mathbf{v}}(A)$ e $B' = \tau_{\mathbf{v}}(B)$.

d) Determinare l'immagine del punto $P(a_1, a_2)$ rispetto all'omotetia $\sigma : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}^2$ di centro A e rapporto 6.

e) Determinare un vettore $\mathbf{w}$ ortogonale a $\mathbf{v}$ e determinare le coordinate del punto A nel riferimento affine $RA(O, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

2) Nello spazio affine euclideo $\mathcal{A}^3$ sia fissato un punto O e si denoti con $\mathcal{V}^3_O$ l'insieme dei vettori del piano applicati in O. Sia $\mathcal{B} = \{\bar{\imath} = \overline{OA_1}, \bar{\jmath} = \overline{OA_2}, \bar{k} = \overline{OA_3}\}$ una base di $\mathcal{V}^3_O$ e si fissi in $\mathcal{A}^3$ il riferimento affine $RA(O, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k})$.

Siano fissati inoltre il punto $B(0, 3, -1)$ ed il piano α di equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2$. Sia A l'intersezione tra il piano α e l'asse delle x_1.

a) Determinare equazioni cartesiane per la retta s passante per B e ortogonale ad α.

b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano passante per A, B e $C(1, 1, 2)$. Discutere se il punto $C(1, 1, 2)$ è allineato con A e B.

c) Determinare equazioni parametriche per il piano α' ottenuto traslando α tramite il vettore $\mathbf{v} = 2\bar{\imath} - \sqrt{5}\bar{\jmath} + 23\bar{k}$.

3) a) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio U di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Determinare un sistema di equazioni cartesiane per U, formato dal numero minimo di equazioni.

c) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio W delle soluzioni del sistema omogeneo in 5 variabili:

$$\begin{cases} x_2 - x_5 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

d) Determinare la dimensione ed una base di $U \cap W$.

4) a) Discutere se $(0, 2, 0, -1)$ appartiene al sottospazio V di $\mathbf{R}^4$ generato da $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 0, 12, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (1/2, 1, 2, 2)$.

b) Determinare la dimensione ed una base di $U + W$, ove $U = Span(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_1)$ e $W = Span(6\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2)$.