

Esame di GEOMETRIA (Prof. F. Tovena)

novembre 2007

Esercizi di ricapitolazione per la OTTAVA SETTIMANA, relativi al Cap. 9 (tranne paragrafo 9.4) e 13 del libro M. Abate-C. de Fabritiis, Geometria analitica con elementi di algebra lineare, McGraw-Hill. (la trasposizione di matrici compare in questa arte del libro, e verrà studiata durante la prossima settimana)

**Argomenti:** matrice trasposta, determinante di una matrice quadrata e sue proprietà, Teorema di Binet, autovettori e autovalori di una matrice quadrata e di un endomorfismo, autospazi, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore, criterio di diagonalizzabilità di un endomorfismo.

1) Si consideri l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  definito dalla posizione:

$$f(x, y, z) = (x, 2x - 2y - 2z, 2x - 3y - z).$$

a) Determinare, se è possibile, un riferimento  $R$  di  $\mathbf{R}^3$  tale che la matrice  $D = M_R(f)$  di  $f$  nel riferimento  $R$  sia diagonale.

b) Sia  $A$  la matrice che rappresenta  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$ . Determinare una matrice invertibile  $P$  tale che,  $D = P^{-1}AP$ .

**Soluzione:** a) La matrice  $A$  che rappresenta  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbf{R}^3$  è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$p_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 - \lambda & -2 \\ 2 & -3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2(-\lambda - 4).$$

Dunque  $f$  ha due autovalori:  $\lambda_1 = 1$ , di molteplicità algebrica uguale a 2, e  $\lambda_2 = -4$ , di molteplicità algebrica uguale a 1. In particolare, lo spettro di  $f$  è reale, cioè il polinomio caratteristico di  $f$  si scompone come prodotto di fattori lineari in  $\mathbf{R}$ . Affinché  $f$  sia diagonalizzabile, occorre mostrare che molteplicità geometrica e algebrica coincidono per ogni autovalore. Sicuramente ciò accade per  $\lambda_2 = -4$ , perché la sua molteplicità algebrica è 1. La molteplicità geometrica  $g(f, 1)$  di  $\lambda_1 = 1$  è per definizione uguale alla dimensione dell'autospazio corrispondente  $A(f, 1) = \ker(f - \omega_1)$  ed è quindi uguale a  $3 - \text{rg}(A - I)$ . Ora

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

ha rango 1 e dunque la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è pari a 2 ed è uguale alla sua molteplicità algebrica. Dunque  $f$  è diagonalizzabile.

Un riferimento  $R$  rispetto al quale  $f$  la matrice associata a  $f$  sia diagonale è un qualunque riferimento di  $\mathbf{R}^3$  formato da autovettori per  $f$ . Per determinare un tale riferimento  $R$ , determiniamo separatamente un riferimento di  $A(f, 1)$  ed uno di  $A(f, -4)$ , poi ne prendiamo l'unione. Lo spazio  $A(f, 1)$  è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente all'equazione  $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$ . Dunque

$$A(f, 1) = \{(3h + 2k, 2h, 2k) | h, k \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da  $\mathbf{v}_1 = (3, 2, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ .

L'autospazio  $A(f, -4)$  è formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - 4I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema  $x_1 = 0, x_2 = x_3$ . Dunque

$$A(f, -4) = \{(0, h, h) | h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è data da  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$ . Il riferimento  $R = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  soddisfa le richieste e

$$M_R(f) = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) Sia  $C$  la matrice le cui colonne sono formate dalle coordinate dei vettori del riferimento scelto  $R$ :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione,  $C$  è la matrice associata all'identità di  $\mathbf{R}^3$ , ove si consideri il riferimento  $R$  nel dominio, e la base canonica nel codominio: se  $\mathbf{v} = x'_1\mathbf{v}_1 + x'_2\mathbf{v}_2 + x'_3\mathbf{v}_3 = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ , si ha che  $C\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ . D'altra parte, se si scrive  $f(\mathbf{v}) = y'_1\mathbf{v}_1 + y'_2\mathbf{v}_2 + y'_3\mathbf{v}_3 = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$ , valgono le relazioni:  $\mathbf{y}' = D\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ,  $C\mathbf{y}' = \mathbf{y}$ . Ne segue che  $C\mathbf{y}' = AC\mathbf{x}'$  e  $D = C^{-1}AC$ . Dunque, la matrice  $P = C$  soddisfa le richieste.

2) Si consideri la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare gli autospazi di  $B$  ed una loro base. Dire se  $B$  è diagonalizzabile su  $\mathbf{R}$ .

**Soluzione** Il polinomio caratteristico  $p_B(\lambda)$  di  $B$  è:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= (2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & -6 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & -4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-4 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -4 - \lambda & -6 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(-4 - \lambda)(-4 - \lambda)(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)^2(4 + \lambda)^2 \end{aligned}$$

Gli autovalori di  $B$  sono dunque  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -4$  ed entrambi hanno molteplicità algebrica 2.

L'autospazio  $A(B, 2)$  è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned} A(B, 2) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = -x_2, x_3 = 0, x_4 = 0\} = \\ &= \{(h, -h, 0, 0) | h \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

e una sua base è costituita dal vettore  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$ . In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è pari a 1, mentre la molteplicità algebrica è 2: dunque la matrice  $B$  non è diagonalizzabile.

L'autospazio  $A(B, -4)$  è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$A(B, -4) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 = x_3 = x_4 = 0\} = \{(0, 0, h, 0) | h \in \mathbf{R}\}$$

e una sua base è costituita dal vettore  $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 0)$ . In particolare, la molteplicità geometrica dell'autovalore  $-4$  è pari a 1 e la matrice  $B$  non è diagonalizzabile.

### Esercizi da svolgere.

- 1) Si consideri l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbf{R}^3$  definito da  $f(x, y, z) = (3x + y + 2z, -4x - 2y - 2z, 2x + 2y)$ .
  - a) Determinare gli autovalori di  $f$  e gli autospazi corrispondenti.
  - b) Dire se  $f$  è diagonalizzabile su  $\mathbf{R}$ .
- 2) La matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

è diagonalizzabile su  $\mathbf{R}$ ?

3) Sia data la matrice  $\mathbf{A}$  (in funzione del parametro reale  $h$ ):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ h & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Determinare le radici del polinomio caratteristico di  $\mathbf{A}$  (in funzione di  $h$ ).
  - Per quali valori di  $h$  gli autovalori di  $\mathbf{A}$  risultano tra loro distinti?
  - Per quali valori di  $h$  la matrice  $\mathbf{A}$  è diagonalizzabile su  $\mathbf{R}$  e qual è una matrice diagonale simile ad  $\mathbf{A}$ ?
- 4) Determinare gli autovalori ed una base di ciascun autospazio dell'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  definito da:

$$f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 4x - 2y - 4z, 4x - 4y - 2z).$$

5) Determinare il polinomio caratteristico della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -3 & 2 \\ 8 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Siano fissate le matrici

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Verificare che  $A_1$  e  $A_2$  hanno entrambe polinomio caratteristico  $p(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ .
- Determinare, per ciascuna matrice, gli autovalori e i relativi autospazi.
- Le matrici sono simili tra loro?
- Calcolare la matrice  $\mathbf{A}_1^n$  per ogni  $n \geq 0$ .