

ESERCIZI 7

1. Sia f l'applicazione lineare da \mathbb{R}^2 in sé la cui matrice associata rispetto alla base canonica \mathcal{C} di \mathbb{R}^2 é:

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$ due vettori in \mathbb{R}^2 .

- (a) Verificare che i vettori v_1 e v_2 formano una base di \mathbb{R}^2 . Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ questa nuova base.
- (c) Scrivere la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\text{id})$ di cambiamento di base dalla vecchia base \mathcal{C} alla nuova base \mathcal{B} . Analogamente scrivere la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\text{id})$ di passaggio dalla base \mathcal{B} alla base \mathcal{C} .
- (d) Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ di f rispetto alla nuova base \mathcal{B} .
- (e) Scrivere le matrici $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.
- (f) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ può essere interpretata come cambio di base dalla base canonica \mathcal{C} ad una nuova base \mathcal{B}' ? Se sí, scrivere la matrice $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ di f rispetto a questa nuova base.
2. Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ dati da $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (1, 2)$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ con w_1, w_2 e w_3 in \mathbb{R}^3 dati da $w_1 = (1, 2, 3)$, $w_2 = (0, 1, 2)$ e $w_3 = (0, 0, 1)$.

- (a) Verificare che \mathcal{B}_1 é una base di \mathbb{R}^2 e \mathcal{B}_2 é una base di \mathbb{R}^3 .
- (b) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che rispetto alle basi \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 é data da

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scrivere la matrice di f rispetto alla basi canoniche di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

3. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ dove $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$.

- (a) Mostrare che \mathcal{B} é una base di \mathbb{R}^3 .
- (b) Determinare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica \mathcal{C} a \mathcal{B} . Si consideri l'applicazione lineare f definita da $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$ e $f(v_3) = v_3$.
- (b) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica \mathcal{C} e rispetto alla nuova base \mathcal{B} .
- (c) Determinare la matrice di f prendendo come base del dominio \mathcal{C} e come base del codominio \mathcal{B} .
4. Sia $M_{2,2}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 . Si consideri l'applicazione $T : M_{2,2} \rightarrow M_{2,2}$ che manda una matrice nella sua trasposta.
- (a) Mostrare che f é un'applicazione lineare e calcolarne la matrice rispetto alla base canonica di $M_{2,2}$.

- (b) Si considerino le matrici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mostrare che esse formano una nuova base \mathcal{B} di $M_{2,2}$.
- (c) Scrivere la matrice di T nella base \mathcal{B} di (b).
5. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Siano $v_1 = 1$, $v_2 = x + 1$ e $v_3 = (x + 1)^2$.
- (a) Mostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}$. Scrivere la matrice di cambiamento di base dalla base canonica a questa nuova base.
- (b) Si consideri l'applicazione lineare definita da $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 1$ e $f(v_3) = 2(x + 1)$. Scrivere la matrice di f nella base canonica e nella nuova base \mathcal{B} .