Facoltà di Ingegneria a.a 2002-2003

GEOMETRIA 1 proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo - 21 ottobre 2002

Spazi e sottospazi vettoriali. Equazioni cartesiane e parametriche per un sottospazio. Appartenenza di un vettore ad un sottospazio. Intersezioni e somme di sottospazi. Dimensione e basi di uno spazio vettoriale e di un suo sottospazio.

1. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}\right), \quad W := \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\right\}$$

   (a) Determinare dimensioni di U e W e una base per ciascuno;
   (b) determinare dimensione di $U + W$ e una sua base;
   (c) determinare dimensione di $U \cap W$ e una sua base.

2. Determinare equazioni parametriche e cartesiane per il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

3. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\2\end{pmatrix}\right)$$

   Decidere se i generatori sono indipendenti, e in caso negativo estrarre una base.

4. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U := \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\} \quad \text{e} \quad W := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}\right).$$

   a) Determinare dimensioni di U e W e una base per ciascuno;
   b) determinare dimensione di $U + W$ e una sua base;
   c) dire se il vettore $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap W$.

5. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \quad \text{e} \quad W := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

a) Determinare dimensioni di U e W e una base per ciascuno;
b) determinare dimensione di $U + W$ e una sua base;
c) dire se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap W$.

6. Siano dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\} \quad \text{e} \quad W := \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

a) Determinare dimensioni di U e W e una base per ciascuno;
b) determinare dimensione di $U + W$ e una sua base;
c) dire se il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap W$.

7. Decidere quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi, motivando la risposta:

a) Tutti i vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

b) tutti i vettori della forma $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$;

c) tutti i vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, con $b = a + c + 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$;

8. Il sottoinsieme T dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ di tutte le matrici $n \times n$ non singolari è un sottospazio? Giustificare la risposta.

9. Il sottoinsieme S dello spazio vettoriale $M_n(\mathbb{R})$ di tutte le matrici $n \times n$ singolari è un sottospazio? Giustificare la risposta.

10. Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di tutte le matrici 2×2 a elementi reali sono sottospazi?

a) Tutte le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; a, b, c, d \in \mathbb{Z};$$

b) tutte le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ a+d=0, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

11. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ di tutti i polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi?
   a) tutti i polinomi $a_0 + a_1x + a_2x2 + a_3x3$ tali che $a_0 = 0$;
   b) tutti i polinomi $a_0+a_1x+a_2x2+a_3x3$ tali che $a_0+a_1+a_2+a_3 = 0$;
   c) tutti i polinomi $a_0 + a_1x + a_2x2 + a_3x3$ con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$.

12. Determinare una base per tutti i sottospazi trovati nei punti precedenti.

13. Sia $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Determinare almeno due supplementari distinti del sottospazio $\text{Span}\ (v_1)$.

14. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio

$$U = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Estrarre una base dall' insieme di generatori.

15. Sia $U = \text{Span}\ (\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ e sia $V = \text{Span}\ (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Provare che $U = V$.

16. Sia U il sottospazio dell'esercizio precedente e sia W il sottospazio delle soluzioni del seguente sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

   a) Determinare la dimensione di W e una sua base;
   b) determinare dimensione di $U \cap W$ e una sua base;
   c) determinare dimensione di $U + W$ e una sua base.
   d) decidere se la somma $U + W$ è diretta.

17. Dati in $M_2(\mathbb{R})$ i sottospazi

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right), \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\right),$$

calcolare la dimensione di $U \cap W$ e la dimensione di $U + W$ e una base per ciascuno di questi sottospazi. Decidere se la somma $U + W$ è diretta.