Facoltà di Ingegneria a.a 2002-2003

GEOMETRIA 1 proff. Baldoni e Piacentini Cattaneo - 14 ottobre 2002

Risoluzione di sistemi lineari. Interpretazione geometrica delle soluzioni di alcuni sistemi. Sistema omogeneo associato ad un sistema. Rango di una matrice. Sistemi dipendenti da parametri. Matrici invertibili. Determinazione dell'inversa di una matrice invertibile.

1. (a) Risolvere ciascuno dei seguenti sistemi quadrati (i primi due in tre incognite, e il terzo in 5 incognite) con il metodo dell'eliminazione di Gauss.

$$i) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases} \qquad ii) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 - 18x_5 = 0 \end{cases}$$

   (b) Cosa rappresentano geometricamente le soluzioni dei primi due sistemi?
   (c) Verificare che le soluzioni dei sistemi precedenti sono somma di una soluzione particolare del sistema e di una del sistema omogeneo associato.
   (d) Tradurre le operazioni elementari necessarie per ottenere le matrici dei sistemi in forma a scala in termini di prodotti di matrici elementari E_{ij} e $E_{ij}(\lambda)$ per le matrici A dei sistemi (o le matrici complete $A|b$).
2. Per quali valori del parametro reale a il seguente sistema in x, y, z non ha soluzioni? Ne ha una e una sola? Ne ha infinite?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

3. (a) Determinare le condizioni su a, b e c che rendono compatibile il seguente sistema nelle tre incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

   (b) Come si interpreta geometricamente questo sistema?

4. Determinare se le seguenti matrici sono invertibili o meno: se sono invertibili, determinare l'inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 & 0 & -18 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

5. Determinare per quali valori dei parametri reali λ e μ ciascuno dei due sistemi nelle tre incognite x, y e z

$$\begin{cases} -x + 2y + z = \lambda + 1 \\ x - y = \mu \\ y + z = o \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x - y + z = -\mu \\ x + z = \frac{1}{2} \\ x + y + z = \lambda \end{cases}$$

ammette soluzioni e per quali valori ci sono soluzioni comuni.

6. Studiare le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite $x_1, x_2, x_3,,$ al variare del parametro reale λ:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

7. Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2 e x_3 in funzione del parametro reale λ e descrivere l'insieme delle soluzioni, quando queste esistono.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

8. Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2 e x_3 in funzione del parametro reale λ e descrivere l'insieme delle soluzioni, quando queste esistono.
$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + (2-\lambda)x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + (5-\lambda)x_3 = 1 \end{cases}$$
9. Si discuta il seguente sistema di tre equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
10. Si discuta il seguente sistema di due equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$
11. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & h-1 & k+1 \\ 1 & 0 & h+2 & -2k \\ 0 & 1 & h+3 & -k+1 \\ 0 & 2 & 5h & -2k+2 \end{pmatrix}, \qquad h, k \in \mathbb{R},$$
Determinare il rango della matrice A al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$.
12. Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2 e x_3 in funzione del parametro reale λ e descrivere l'insieme delle soluzioni, quando queste esistono.
$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1 \end{cases}$$
13. Dare la definizione di matrice quadrata invertibile. Dare delle definizioni equivalenti.
14. Calcolare il prodotto $C = AB$ dove
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcolare il determinante di C e se C è invertibile calcolarne l'inversa.

15. Dire quali delle seguenze affermazioni è vera o falsa. Se l'affermazione è falsa dare un controesempio.
    (a) Date due matrici quadrate il loro prodotto è commutativo.
    (b) Ogni matrice quadrata è invertibile.
    (c) La matrice elementare che corrisponde allo scambio di due righe è invertibile.
    (d) Se $C = AB$ con $A, B \in M_{n,n}$ allora C è invertibile se e solo se A e B lo sono.
    (e) Siano $A, B \in M_{n,n}$ allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
    (f) Siano $A, B \in M_{n,n}$. Se $AB = BA$ ed esiste A^{-1} allora $A^{-1}B = BA^{-1}$.
16. Per $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ calcolare A^n (n un intero positivo).
17. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che non esiste una matrice B tale che $B^2 = A$.

18. Trovare i numeri reali a, b, c per cui la matrice A definita da

$$\begin{pmatrix} 4 & a-b+2c & a+b+c \\ 3+a & a-c & a+c \\ c & -2 & 7-b \end{pmatrix}$$

è simmetrica. (Una matrice quadrata $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$ si dice simmetrica se $\forall i, j,\ a_{ij} = a_{ji}$.)