

Insiemi e operazioni tra insiemi- Funzioni- Vettori applicati- Coordinate di un vettore rispetto ad una base

1. Scrivere esplicitamente gli elementi dei seguenti insiemi:
 - a) $A = \{\text{numeri dispari divisibili per 11 e minori di 100}\}$;
 - b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 5 = 0\}$;
 - c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2h, h \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq x < 20\}$;

2. Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

$$A = \emptyset, B = \{\emptyset\}, C = \{0\}.$$

3. Quali dei seguenti insiemi sono l'insieme vuoto?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4, 3x = 5\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 5 = 5\}, \\ C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 81, x = 2h, h \in \mathbb{Z}\}, D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9, x < 0\}.$$

4. Scrivere le relazioni di inclusione relative agli insiemi del punto precedente.

5. Determinare $\mathcal{P}(A)$ se:

- a) $A = \{a, b, c\}$;
- b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$;

6. Quali di queste applicazioni sono suriettive, iniettive, biiettive:

$$\phi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^3;$$

$$\phi_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longrightarrow 5x;$$

$$\phi_3 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longrightarrow x^3;$$

$$\phi_4 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longrightarrow 5x;$$

$$\begin{aligned}\phi_5 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \\ x &\longrightarrow x^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_6 : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longrightarrow x^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_7 : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^3.\end{aligned}$$

7. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_0^2 .
- a) Verificare che i vettori $\vec{i}' = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{j}' = \vec{i} - 2\vec{j}$ formano una base di \mathcal{V}_0^2 .
- b) Determinare le coordinate del vettore $5\vec{i} + 3\vec{j}$ nella base $\mathcal{B} = \{\vec{i}', \vec{j}'\}$.
8. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base di \mathcal{V}_0^2 . Presi i due vettori di \mathcal{V}_0^2

$$\vec{0A} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{0B} = \vec{i} - 4\vec{j}$$

- a) verificare che i vettori non sono proporzionali, e quindi formano una base di \mathcal{V}_0^2 ;
- b) Determinare le coordinate del vettore $\vec{0C} = \vec{i} - \vec{j}$ nella base $\mathcal{B}' = \{\vec{0A}, \vec{0B}\}$.
9. Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di \mathcal{V}_0^3 . Dati i vettori
- $$\vec{0P}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j}, \quad \vec{0P}_2 = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{0P}_3 = -3\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$$
- trovare le coordinate dei vettori $\vec{0P}_1 + 4 \cdot \vec{0P}_3$ e di $\vec{0P}_3 - 3 \cdot \vec{0P}_2 - \vec{0P}_1$.

10. Si considerino le matrici seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -8 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Indichiamo con a_{ij} , b_{hk} e c_{rs} gli elementi rispettivamente di A , B e C

- i) Stabilire tra quanto variano gli indici i, j, h, k, r, s ;
- ii) Trovare a_{23} , b_{34} , c_{33} ;

iii) Fare tutti i prodotti che si possono fare con queste tre matrici.

11. Scrivere la matrice A dei coefficienti e la matrice completa $A|b$ dei seguenti sistemi

$$i) \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ x_3 - 2x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_4 = 1 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} 3x_1 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad \blacksquare$$