Università degli Studi di Roma Tor Vergata.
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Energetica, dei Modelli e dei Sistemi

Esame di Geometria 1/ Algebra Lineare (Prof. F. Tovena) ottobre 2007

COGNOME.. NOME............................ N.MATRICOLA...................
CORSO DI STUDI...................................

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE NELLO SPAZIO ASSEGNATO. VA CONSEGNATO SOLO QUESTO FOGLIO.

1) Nel piano affine euclideo $\mathcal{A}^2$ siano fissati un punto O ed un riferimento affine $RA(O, \overline{i}, \overline{j})$, con coordinate (x_1, x_2, x_3). Siano fissati inoltre i punti $A(-1, 2)$ e $B(0, 1)$ e la retta r di equazione cartesiana $3x_1 - 6x_2 = 5$.

a) Determinare equazioni parametriche della retta s per A e ortogonale a r.

b) Controllare che il punto $C(1, 0)$ è allineato con A e B.

c) Sia $\sigma : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}^2$ l'omotetia di rapporto 3 e centro B. Controllare se $\sigma(A)$ appartiene ad s.

Soluzione a) Come vettore direttore di s basta prendere il vettore $\overline{i} - 2\overline{j}$, che è ortogonale a r. Le equazioni parametriche di s sono date da $x_1 = -1 + t, x_2 = 2 - 2t$.

b) La retta per A e per B ha equazione cartesiana $x_1 + x_2 = 1$. Il punto C è allineato con A e B perché le sue coordinate soddisfano l'equazione $x_1 + x_2 = 1$.

c) Chiamo $A' = \sigma(A)$: si ha $\overline{BA'} = 3\overline{BA}$, e dunque $\overline{OA'} = 3[\overline{0A} - \overline{0B}] + \overline{0}B = -3\overline{i} + 4\overline{j}$. Il punto $A'(-3, 4)$ non appartiene ad s perché il sistema $-3 = -1 + t, 4 = 2 - 2t$ non ha soluzione in t.

....

2) Si considerino i seguenti vettori in $\mathbf{R}^4$: $\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{u}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mostrare che tali vettori sono linearmente dipendenti ed esprimere esplicitamente uno di loro come combinazione lineare degli altri.

Soluzione I vettori $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4$ sono linearmente dipendenti se e solo se esistono $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}$ non tutti nulli tali che $a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + a_3\overline{u}_3 + a_4\overline{u}_4 = \overline{0}$. I coefficienti (a_1, a_2, a_3, a_4) con tale proprietà sono esattamente le soluzioni non nulle del sistema lineare omogeneo $A\overline{x} = \overline{0}$ la cui matrice dei coefficienti A ha per colonne i vettori $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_3$, $\overline{u}_4$. La condizione affinchè tali vettori risultino linearmente dipendenti è che la matrice A abbia rango strettamente minore di 4. Riducendo A a scala tramite trasformazioni elementari sulle righe, si trova:

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 11 & 22 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque i vettori sono linearmente dipendenti, perché la matrice A ha rango 3 e lo spazio delle soluzioni di $A\overline{x} = \overline{0}$ ha dimensione 1. Dal sistema ridotto associato si ricava immediatamente che le soluzioni sono $\{(-3t, -2t, t, 0) | t \in \mathbf{R}\}$. In particolare $-3\overline{u}_1 - 2\overline{u}_2 + \overline{u}_3 = \overline{0}$ e $\overline{u}_3 = 3\overline{u}_1 + 2\overline{u}_2$ è la combinazione lineare cercata.

3) Siano $U = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-3\\3\\-6\end{pmatrix}\right\}$ e $W = Span\left\{\begin{pmatrix}2\\7\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\9\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$ due sottospazi di $\mathbf{R}^4$.

a) Determinare la dimensione ed una base dell'intersezione dello spazio somma $U + W$.

b) Determinare un sistema di equazioni cartesiane per U, formato dal numero minimo di equazioni.

c) Determinare la dimensione ed una base dell'intersezione $U \cap W$.

Soluzione (scrivo solo la risposta, senza la sua giustificazione)

a) dim $U + W = 3$ e una sua base è ad esempio data da $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\1\\4\end{pmatrix}$.

c) dim $U \cap W = 1$ ed una sua base è data ad esempio da $\begin{pmatrix}5\\1\\-5\\10\end{pmatrix}$.

....

4) Nello spazio affine euclideo $\mathcal{A}^3$ siano fissati un punto O e un riferimento affine $RA(O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$.

Siano fissati inoltre il punto $A(1, 0, -1)$ ed il vettore $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{k}$.

a) Determinare equazioni cartesiane per la retta s passante per A e parallela al vettore $\overline{v}$.

b) Sia A' il punto ottenuto traslando A tramite il vettore $\overline{v}$. Determinare equazioni cartesiana e parametriche del piano α per A' e ortogonale a $\overline{v}$.

c) Determinare l'intersezione tra α e s.