20/11/2007 GEOMETRIA 1 - II ESONERO Corso: ☐A&T ☐TLC

COGNOME .... NOME ....

Risolvere gli esercizi negli spazi appositi. Verrà corretto SOLO QUESTO FOGLIO. Motivare le risposte.

1. Rispondere alle seguenti domande, motivando le risposte.
   (a) Quali delle seguenti applicazioni $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono lineari?
   $$(i) \quad f(x,y) = 2x + y, \qquad (ii) \quad f(x,y) = x - 1, \qquad (iii) \quad f(x,y) = xy.$$
   (b) Dire se esiste un applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con nucleo e immagine uguali a:
   $$(i) \quad \ker f = \mathrm{span}(\mathrm{e}_1),\ \mathrm{Im}\, f = \mathrm{span}(\mathrm{e}_1), \qquad (ii) \quad \ker f = \mathrm{span}(\mathrm{e}_1),\ \mathrm{Im}\, f = \mathrm{span}(\mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3), \qquad (iii) \quad \ker f = 0,\ \mathrm{Im}\, f = 0.$$
   (c) Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi affini o vettoriali:
   $$(i) \quad V = \{(s,t,s+t) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}, \qquad (ii) \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = z+1\}, \qquad (iii) \quad V = \{(s,t,st) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}.$$

2. In $\mathbb{R}^2$, al variare del parametro $s \in \mathbb{R}$, siano $\mathcal{C} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$ la base canonica e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ l'insieme costituito dai vettori $v_1 = s\mathrm{e}_1 + s\mathrm{e}_2$ e $v_2 = -3\mathrm{e}_1 + s\mathrm{e}_2$.
   (a) Determinare i valori di s per cui $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.
   (b) Per $s = 3$ scrivere i vettori e_1, e_2 rispetto alla base $\mathcal{B}$.
   (c) Per $s = 3$ scrivere le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ e viceversa.

20/11/2007 GEOMETRIA 1 - II ESONERO Corso: ☐A&T ☐TLC

COGNOME .... NOME ....

Risolvere gli esercizi negli spazi appositi. Verrà corretto SOLO QUESTO FOGLIO. Motivare le risposte.

3. In $\mathbb{R}^2$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, siano $v_1 = (1, -2)$ e $v_2 = (-2, k)$ e si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y) = xv_1 + yv_2$.
   (a) Verificare che f è un'applicazione lineare.
   (b) Determinare, al variare di k, la dimensione del nucleo e dell'immagine di f. Dire per quali valori di k l'applicazione f è iniettiva, suriettiva e invertibile.
   (c) Per $k = 4$ sia W l'insieme dei vettori $w \in \mathbb{R}^2$ per cui $f(w) = (3, -6)$. Trovare equazioni parametriche per W. È un sottospazio vettoriale o affine di $\mathbb{R}^2$?

4. In $\mathbb{R}^2$ siano $\mathcal{C} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$ la base canonica e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ la base composta dai vettori $v_1 = 2\mathrm{e}_1 + 2\mathrm{e}_2$ e $v_2 = -\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$. Siano $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari associate alle matrici:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verificare che f è invertibile e calcolare la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1})$.
(b) Scrivere equazioni cartesiane e parametriche del nucleo e dell'immagine di g.
(c) Scrivere la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g \circ f)$.