

GIUSTIFICARE CON CHIAREZZA LE RISPOSTE NELLO SPAZIO ASSEGNATO. VA CONSEGNATO SOLO QUESTO FOGLIO.

1) Nel piano affine euclideo \mathcal{A}^2 siano fissati un punto O ed un riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$. Siano fissati inoltre i punti $A(1, -2)$ e $B(2, 0)$ e l'omotetia $\sigma : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}^2$ di rapporto 3 e centro O .

a) Controllare se $A, B, C(-2, -6)$ sono allineati. Stessa domanda per $A' = \sigma(A), B' = \sigma(B), C' = \sigma(C)$.

b) Determinare l'intersezione tra la retta r per A e B e la retta l passante per $(1, 1)$ e ortogonale all'asse x_1 .

Soluzioni a) I punti A, B, C sono allineati se e solo se i vettori $\overline{OA} - \overline{OB} = -\vec{i} - 2\vec{j}$ e $\overline{OA} - \overline{OC} = -4\vec{i} - 6\vec{j}$ sono proporzionali. Poiché ciò non è vero, ne deduco che i tre punti non sono allineati. Stessa risposta per la seconda parte della domanda, perché $\overline{OP'} = 3\overline{OP}$ se $P' = \sigma(P)$.

b) La retta l ha equazione cartesiana $x_1 = 1$, mentre la retta r per A e B ha equazione parametrica $x_1 = 2 - t, x_2 = -2t$ ($t \in \mathbf{R}$). L'intersezione cercata è data dal punto $P(1, -2)$.

Soluzione degli esercizi con dati differenti (solo le parti diverse):

1. Dati $A(-2, 1)$ e $B(0, -3), C(-4, 3)$, i tre punti risultano non allineati perché $\overline{OA} - \overline{OB} = -2\vec{i} + 4\vec{j}, \overline{OA} - \overline{OC} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$. La retta l ha equazione cartesiana $x_1 = 1$, mentre la retta r per A e B ha equazione parametrica $x_1 = -2t, x_2 = -3 + 4t$ ($t \in \mathbf{R}$). L'intersezione cercata è data dal punto $P(1, -5)$.

2. Dati $A(3, -1)$ e $B(0, 1), C(9, 5)$ i tre punti risultano non allineati perché $\overline{OA} - \overline{OB} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \overline{OA} - \overline{OC} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$. La retta l ha equazione cartesiana $x_1 = 1$, mentre la retta r per A e B ha equazione parametrica $x_1 = 3t, x_2 = 1 - 2t$ ($t \in \mathbf{R}$). L'intersezione cercata è data dal punto $P(1, 1/3)$.

3. Dati $A(1, -3)$ e $B(-1, 0), C(5, -6)$, i tre punti risultano non allineati perché $\overline{OA} - \overline{OB} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \overline{OA} - \overline{OC} = 6\vec{i} - 6\vec{j}$. La retta l ha equazione cartesiana $x_1 = 1$, mentre la retta r per A e B ha equazione parametrica $x_1 = -1 + 2t, x_2 = -3t$ ($t \in \mathbf{R}$). L'intersezione cercata è data dal punto $A(1, -3)$.

2) Si considerino i seguenti vettori in \mathbf{R}^4 : $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Mostrare che $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ formano una base \mathcal{B} di $U = \text{Span}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$.

b) Mostrare che \bar{u} appartiene ad U e determinarne esplicitamente le componenti rispetto alla base \mathcal{B} .

Soluzioni Tenendo conto delle domande a) e b), considero la matrice A le cui colonne sono formate dai vettori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ ed il sistema non omogeneo $A\bar{x} = \bar{u}$. Opero mediante eliminazione di Gauss sulla matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ per determinare una sua forma a scala } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è 3 e i pivot compaiono nelle prime tre colonne. Dunque $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ sono linearmente indipendenti e $\bar{u} \in U$. Risolvendo il sistema ridotto, ricavo che $\bar{u} = -(19/6)\bar{u}_1 - (17/6)\bar{u}_2 + (13/6)\bar{u}_3$. Le componenti di \bar{u} nella base \mathcal{B} sono quindi date da $(-19/6, -17/6, 13/6)$.

Chi non si sente sicuro di tale procedimento, può discutere separatamente l'indipendenza lineare di $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, controllando che abbia rango 3 la matrice le cui righe siano formate dai vettori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$.

Soluzione degli esercizi con dati differenti (solo le parti diverse):

1. Dati $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{u} \notin U$.

2. Dati $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\bar{u} \notin U$.

3. Dati $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le componenti di \bar{u} nella base \mathcal{B} sono quindi date da $(-4/5, 3/5, -1/5)$.

3) In \mathbf{R}^4 si considerino i due sottospazi vettoriali $U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

e W formato dalle soluzioni del sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

a) Determinare la dimensione ed una base di U e (rispettivamente) di W .

b) Determinare la dimensione ed una base dell'intersezione $U \cap W$.

Soluzioni a) Operando tramite l'eliminazione di Gauss sulle righe della matrice le cui righe sono

formate dai generatori di U indicati nel testo, ricavo una sua forma ridotta: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deduco che $\dim U = 3$ e una base di U è data dalle righe non nulle della matrice ridotta: $\bar{u}_1 = (1, -1, -1, 2)$, $\bar{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\bar{u}_3 = (0, 0, -1, 1)$. Poiché la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo che definisce W ha rango 2, la dimensione di W è pari a $4 - 2 = 2$. Una base di W è data da una coppia di soluzioni linearmente indipendenti; ad esempio, $\bar{w}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\bar{w}_2 = (0, 1, 1, 0)$ formano una base di W .

b) Per cercare la dimensione ed una base di $U \cap W$, cerco per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbf{R}$ il vettore $a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2 + c\bar{u}_3$ (che sicuramente appartiene a U) risulti appartenere anche a W , cioè soddisfi le equazioni di W . Ricavo il sistema $a - 2a - c = 0$, $-a + b + a - b + 10c = 0$, dal quale deduco che $U \cap W$ ha dimensione 1 e una sua base è formata da $\bar{u}_2 = (0, 1, 1, 0)$.

Soluzione degli esercizi con dati differenti (solo le parti diverse):

1. $U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ e W definito da: $\begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$, il sot-

tospazio U ha dimensione 3 e una sua base è data da $\bar{u}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\bar{u}_2 = (0, 1, 0, 6)$, $\bar{u}_3 = (0, 0, 1, 1)$. Il sottospazio W ha dimensione 2 e una sua base è data da $\bar{w}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\bar{w}_2 = (0, 0, 1, 1)$. Il sottospazio $U \cap W$ ha dimensione 1 e una sua base è formata da $\bar{u}_3 = (0, 0, 1, 1)$.

2. Dati $U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e W definito da: $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$,

allora U ha dimensione 3, con base $\bar{u}_1 = (1, 2, 1, -1)$, $\bar{u}_2 = (0, 6, 4, -1)$, $\bar{u}_3 = (0, 0, 1, 5)$. Il sottospazio W ha dimensione 2 e una sua base è data da $\bar{w}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\bar{w}_2 = (0, 1, 1, 0)$. Il sottospazio $U \cap W$ ha dimensione 1 e una sua base è formata da $-3\bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \bar{u}_3 = (3, 0, 0, 3)$ (o da $(1, 0, 0, 1)$).

3. Dati $U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ e W definito da: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, il

sottospazio U ha dimensione 3 e una sua base è data da $\bar{u}_1 = (1, -1, 1, 2)$, $\bar{u}_2 = (0, -1, 0, 2)$, $\bar{u}_3 = (0, 0, 1, 9)$. Il sottospazio W ha dimensione 2 e una sua base è data da $\bar{w}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\bar{w}_2 = (0, 1, 0, 1)$. Il sottospazio $U \cap W$ ha dimensione 1 e una sua base è formata da $\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$.

4) Nello spazio affine euclideo \mathcal{A}^3 siano fissati un punto O e un riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Siano fissati inoltre i punti $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$.

a) Determinare equazioni cartesiane e parametriche di un piano α passante per A , B e C . Tale piano è unico?

b) Determinare equazioni cartesiane della retta r passante per A e ortogonale a α .

c) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta s passante per A , contenuta in α e ortogonale alla retta l che passa per A e B .

Soluzione

a) Osservando che i vettori $\overline{OA} - \overline{OC} = \vec{i}$ e $\overline{OB} - \overline{OC} = \vec{j} - \vec{k}$ risultano paralleli ad α e sono linearmente indipendenti, ricavo che il piano α è unico e ha equazioni parametriche:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_3 = 1 - b \quad (a, b \in \mathbf{R});$$

eliminando i parametri, osservo che una equazione cartesiana per α è data da $x_2 + x_3 = 1$.

b) Il piano α è ortogonale al vettore $\mathbf{v} = \vec{j} + \vec{k}$, che è dunque parallelo alla retta cercata. Ne ricavo le equazioni parametriche per r date da $x_1 = 1, x_2 = c, x_3 = 1 + c$ ($c \in \mathbf{R}$), dalle quali, eliminando i parametri, si trovano le equazioni cartesiane $x_1 = 1, x_2 - x_3 + 1 = 0$.

c) La retta s si ottiene intersecando α con il piano β per A e ortogonale a l (cioè ortogonale a $\overline{OB} - \overline{OA} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$). Il piano β ha equazione cartesiana della forma $-x_1 + x_2 - x_3 = d$ con $d = -2$ per fare in modo che il piano passi per A . La retta l ha dunque equazioni cartesiane $x_2 + x_3 = 1, -x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0$. Ricavo le equazioni parametriche di l : $x_1 = 3 - 2t, x_2 = 1 - t, x_3 = t$ ($t \in \mathbf{R}$).

Soluzione degli esercizi con dati differenti (solo le parti diverse):

1. Posti $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 0)$ e $C(0, 0, 1)$, si ricava in modo analogo: a) α ha equazioni parametriche: $x_1 = a + b, x_2 = a, x_3 = 1 - a - b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) e cartesiane: $x_1 + x_3 = 1$.

b) la retta r ha equazioni cartesiane: $x_2 = 1, x_1 - x_3 = 1$.

c) la retta s ha equazioni cartesiane: $x_1 + x_3 = 1, x_1 - x_2 - x_3 = 0$ e parametriche $x_1 = 1 - t, x_2 = 1 - 2t, x_3 = t$ ($t \in \mathbf{R}$).

2. Posti $A(0, 1, 1)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(1, 0, 0)$, si ricava in modo analogo: a) α ha equazioni parametriche: $x_1 = b, x_2 = 1 - b, x_3 = a$ ($a, b \in \mathbf{R}$) e cartesiane: $x_1 + x_2 = 1$.

b) la retta r ha equazioni cartesiane: $x_3 = 1, x_1 - x_2 = 1$.

c) la retta s ha equazioni cartesiane: $x_1 + x_2 = 1, x_3 = 1$ e parametriche $x_1 = 1 - t, x_2 = t, x_3 = 1$ ($t \in \mathbf{R}$).

3. Posti $A(0, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$ e $C(1, 0, 0)$, si ricava in modo analogo: a) α ha equazioni parametriche: $x_1 = b, x_2 = a, x_3 = 1 - b$ ($a, b \in \mathbf{R}$) e cartesiane: $x_1 + x_3 = 1$.

b) la retta r ha equazioni cartesiane: $x_2 = 1, x_1 - x_3 = 1$.

c) la retta s ha equazioni cartesiane: $x_1 + x_3 = 1, x_2 = 1$ e parametriche $x_1 = 1 - t, x_2 = 1, x_3 = t$ ($t \in \mathbf{R}$).