1. Discutere e risolvere al variare dei parametri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= \lambda \\ x + \mu y &= 0 \end{cases} .$$

(8 punti)

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare il rango di A.

(ii) Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} A^2\mathbf{x} + 3A\mathbf{y} & = & 0 \\ 2A\mathbf{x} - \mathbf{y} & = & 0 \end{cases},$$

dove le variabili $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ sono elementi di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Dimostrare per assurdo che se per una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ il sistema del punto (ii) per le variabili $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ha più di una soluzione, allora $\mathrm{rg}(A) < n$.

(8 punti)

3. Sia $W = \mathrm{Span}\{u_1, u_2\}$ dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(i) Dimostrare che sia i vettori u_1, u_2, che i vettori $u_1, 2u_2 - 3u_1$ formano una base di W.

(ii) Dimostrare in generale, che se (b_1, b_2, b_3) è una base dello spazio lineare V e $v \in V$, $v \notin \mathrm{Span}\{b_1, b_2\}$, allora anche (b_1, b_2, v) è una base di V.

(7 punti)

4. Siano

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 2\\ -1 \end{pmatrix} \right\} \\ W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

(i) Determinare una base di W_1.

(ii) Calcolare la dimensione di $W_1 \cap W_2$.

(10 punti)