

PRIMO ESONERO DI GEOMETRIA

5 novembre 2003

SOLUZIONI Compito A

1. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 si considerino i vettori:

$$v_1 = (k, 3k, 0), \quad v_2 = (2k, k - 1, 1), \quad v_3 = (k + 1, 0, 1) \quad (k \in \mathbb{R}).$$

- (a) Dire per quali valori di k , $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di \mathbb{R}^3 .
- (b) Detto U il sottospazio generato da v_1, v_2 e v_3 per $k = 0$, e V il sottospazio generato da v_1, v_2 e v_3 per $k = 1$, trovare le dimensioni di U e V .
- (c) Trovare una base di $U \cap V$ e completarla a una base di \mathbb{R}^3 .

Soluzione

(a) Costruiamo la matrice associata a $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2k & k + 1 \\ 3k & k - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base se e solo se $\text{rk } A = 3$.

Applichiamo il processo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{aligned} R_2 &\longleftrightarrow R_3, \\ R_3 &\longmapsto R_3 - 3R_1, \\ R_3 &\longmapsto R_3 + (5k + 1)R_2, \end{aligned}$$

e otteniamo la matrice:

$$A' = \begin{pmatrix} k & 2k & k + 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2k - 2 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha tre pivot: k , 1 e $2k - 2$. I vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ pertanto formano una base se e solo se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.

(b) Per $k = 0$:

$$v_1 = (0, 0, 0), \quad v_2 = (0, -1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 1);$$

quindi

$$U = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Analogamente per $k=1$

$$V = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Le coppie di vettori $\{(0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ e $\{(1, 3, 0), (2, 0, 1)\}$ sono chiaramente linearmente indipendenti, perciò $\dim U = 2$ e $\dim V = 2$.

(c) Troviamo equazioni cartesiane per U , riducendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo l'equazione:

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Qualunque vettore di V si scrive come combinazione lineare dei vettori $(1, 3, 0)$ e $(2, 0, 1)$, poiché questa è una base di V . Le coordinate di un vettore $v \in V$ sono quindi della forma:

$$v = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ 3a \\ b \end{pmatrix}.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione trovata in precedenza, troviamo che v appartiene a $U \cap V$ se e solo se $2a = b$, ovvero se le sue coordinate sono $(5a, 3a, 2a)$. Per trovare una base del sottospazio costituito da questi vettori possiamo sostituire $a = 1$, ottenendo la base $\{(5, 3, 2)\}$

2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare che soddisfa

$$(*) \quad f(1, 0, 1) = (1, 1), \quad f(0, 0, 1) = (1, 0), \quad f(1, 1, 0) = (0, 1).$$

- (a) Verificare che le relazioni (*) definiscono univocamente f . Trovare $f(3, 2, 1)$.
- (b) Trovare una base di $\ker f$.
- (c) Dire se f è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

Soluzione

(a) Detti

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, 0),$$

l'applicazione f è univocamente definita se $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base, e questo fatto si verifica facilmente.

Per trovare il valore di $f(3, 2, 1)$ esprimiamo il vettore $v = (3, 2, 1)$ come combinazione lineare $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$. Ciò equivale a risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la cui soluzione è $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$. Il valore cercato è:

$$f(3, 2, 1) = f(v_1) + 2f(v_3) = (1, 3).$$

- (b) L'immagine di f è \mathbb{R}^2 , poiché ne contiene la base canonica. Il rango di f è perciò pari a 2 e la dimensione del nucleo pari a 1. Per trovare una base di $\ker f$ è quindi sufficiente trovare un solo vettore non nullo che appartenga al nucleo di f , ovvero risolvere il sistema

$$a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + a_3f(v_3) = 0$$

che ha come soluzioni i vettori $(0, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Per $t = 1$ si ottiene la base $\{(0, 1, 0)\} = \{e_2\}$.

- (c) Abbiamo già notato che $\text{im } f = \mathbb{R}^2$, quindi f è suriettiva. Inoltre $\ker f \neq \{0\}$, quindi f non è iniettiva. Infine, non essendo iniettiva, f non è neanche biiettiva.

3. Discutere e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + x_3 = 2\lambda \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Scriviamo la matrice associata al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ \lambda & \lambda^2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

e applichiamo l'eliminazione di Gauss:

$$\begin{aligned} R_2 &\longmapsto R_2 - R_1, \\ R_3 &\longmapsto R_3 - \lambda R_1, \\ R_2 &\longleftrightarrow R_3, \end{aligned}$$

Ora scambiamo la seconda e la terza colonna; questo equivale a scambiare tra loro le incognite x_2 e x_3 (L'esercizio può essere svolto anche procedendo normalmente con l'eliminazione di Gauss, ma i calcoli risultano più complicati). Otteniamo la nuova matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda & 2\lambda \\ 0 & -\lambda - 2 & 2\lambda^2 & 2 - 2\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & -2\lambda - 1 \end{array} \right)$$

Se $\lambda \neq \pm 2$ il sistema ha rango 3 ed esiste un'unica soluzione. Ricordando che abbiamo scambiato le variabili x_2 e x_3 calcoliamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 8}{\lambda(\lambda - 2)}, \\ x_2 = \frac{2\lambda + 1}{2 - \lambda}, \\ x_3 = \frac{2(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 4)}{\lambda(2 - \lambda)}. \end{cases}$$

Se $\lambda = 2$ il sistema è incompatibile, ovvero non ha soluzioni.

Se $\lambda = -2$ il sistema ha rango 2 ed è compatibile. L'insieme S delle soluzioni dipende da un parametro t :

$$S = \left\{ \left(-\frac{7}{2}t, -\frac{3}{4}t, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 si considerino i vettori di coordinate:

$$u_1 = (1, 0, 0, 0),$$

$$u_2 = (1, 2, 0, 0),$$

$$u_3 = (1, 2, 3, 0),$$

$$u_4 = (1, 2, 3, 4).$$

rispetto alla base canonica.

(a) Verificare che $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ è una base di \mathbb{R}^4 .

(b) Determinare le coordinate di $v = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Soluzione

(a) Scriviamo la matrice associata al sistema di vettori $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

È evidente che il rango è pari a 4, quindi i vettori formano una base.

(b) Bisogna risolvere il sistema:

$$Ax = v$$

a cui è associata la matrice:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{array} \right).$$

La soluzione è:

$$x_1 = 3/2, \quad x_2 = -5/6, \quad x_3 = 7/12, \quad x_4 = -1/4.$$

5. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

- (a) Scrivere la matrice $B = A^2$.
- (b) Trovare una base del sottospazio $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid Bv = 0\}$. Qual è il rango di B ?
- (c) Risolvere $Bv = (1, 1, a)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione

(a) Si esegue la moltiplicazione righe per colonne:

$$B = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -13 \\ -2 & -10 & -22 \\ 3 & 14 & 31 \end{pmatrix}.$$

(b) Mediante il procedimento di eliminazione di Gauss otteniamo la matrice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & -13 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\text{rk } B = 2$.

Il sistema lineare associato ha soluzioni:

$$S = \{(-t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Scegliendo $t = 1$ otteniamo la base $\{(-1, -2, 1)\}$.

(c) Appliciamo il procedimento di eliminazione di Gauss alla matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -6 & -13 & 1 \\ -2 & -10 & -22 & 1 \\ 3 & 14 & 31 & a \end{array} \right),$$

ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -6 & -13 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array} \right).$$

Se $a \neq -1$ il sistema non è compatibile. Se $a = -1$ il sistema è compatibile e ha rango 2; l'insieme delle soluzioni è:

$$S = \{(2 - t, -2t - 1/2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$