GEOMETRIA 1 (prof. Artale) ESONERO 1 Roma, 16 novembre 2005

COGNOME.............................. NOME .... Corso ....

Risolvere gli esercizi negli spazi appositi. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare.
Verrà corretto SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7,5.

1. Sia $U = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ dove $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (3, -2, 1)$.
   (a) Estrarre dai vettori v_1, v_2, v_3 una base di U.
   (b) Completare la base trovata in (a) ad una base di $\mathbb{R}^3$.
   (c) Trovare un sottospazio vettoriale W tale che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi $U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$
   e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0, x - z = 0\}$.
   (a) Determinare la dimensione di U e sue equazioni cartesiane.
   (b) Determinare $\dim(U \cap V)$ e una sua base.
   (c) Completare la base di $U \cap V$ trovata in (b) ad una base di U.

3. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - z = 0, x + 2y = 0\}$.

   (a) Determinare $\dim(V)$ e una sua base.

   (b) Il vettore $w = (0, 1, 1)$ appartiene a V? Se sì, determinare le sue coordinate rispetto alla base trovata in (a).

   (c) Scrivere equazioni cartesiane per il sottospazio affine di giacitura V e passante per w.

4. Si consideri la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 2t & 0 \\ 1 & 2t & t+1 \end{pmatrix}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Per quali valori di t, A_t é invertibile?

   (b) Calcolare, quando esiste, A_t^{-1}.

   (c) Discutere e risolvere il sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.