31/10/2007 GEOMETRIA 1 - I ESONERO Corso: ☐A&T ☐TLC

COGNOME .... NOME ....

Risolvere gli esercizi negli spazi appositi. Verrà corretto SOLO QUESTO FOGLIO. Motivare le risposte.

1. Considerare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, i seguenti piani in $\mathbb{R}^3$:

$$\pi_1\colon x_1 + (k+1)x_3 = 1, \quad \pi_2\colon (k+1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \pi_3\colon kx_1 - x_2 + kx_3 = -2k.$$

   (a) Trovare, per $k = 0$, l'intersezione di π_1, π_2 e π_3.
   (b) Verificare che $\pi_1 \cap \pi_2$ è una retta per qualunque valore di k e discutere la posizione reciproca di $\pi_1 \cap \pi_2$ e π_3.
   (c) Spiegare perché le rette $\pi_1 \cap \pi_2$ e $\pi_1 \cap \pi_3$ non possono essere sghembe?

2. Sono dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,1,0,1),\ v_2 = (2,1,1,0),\ v_3 = (3,0,1,1),\ u_4 = (0,1,1,0).$$

   (a) Estrarre da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di $U = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, e completarla a una base di $\mathbb{R}^4$.
   (b) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui il vettore $w = (1,1,2t-8,t+1)$ appartiene a U. Per tali valori di t scrivere w rispetto alla base trovata al punto (a).
   (c) Se tre vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti, mostrare che u_1+u_2, u_2+u_3, u_3+u_1 sono linearmente indipendenti.

3. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_4 = 0\} \quad V = \operatorname{span}\big((1,2,0,1),(2,4,1,1),(0,0,-1,1),(1,2,-4,5),(1,1,0,5)\big).$$

(a) Determinare la dimensione e una base di $U + V$ e $U \cap V$.

(b) Dire se il vettore $w = (1,-2,-3,4)$ appartiene a $U + V$. In caso affermativo decomporlo come somma di un vettore di U e un vettore di V.

(c) Dati due sottospazi di dimensione 3 in $\mathbb{R}^5$, quali dimensioni possono avere la loro intersezione e la loro somma?