29/11/2007 GEOMETRIA 1 ☐III ESONERO ☐I APPELLO Corso: ☐A&T ☐TLC

COGNOME .... NOME ....

Risolvere gli esercizi negli spazi appositi. Verrà corretto SOLO QUESTO FOGLIO. Motivare le risposte.

1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si considerino, al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$, i seguenti piani:

$$\pi_1 : x + by + az = 1, \quad \pi_2 : ax + by + z = a, \quad \pi_3 : x + aby + z = b.$$

(a) Determinare, al variare di a e b, la dimensione di $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.
(b) Discutere la posizione reciproca dei piani π_1 e π_2.
(c) Per $a = 1$, $b = 1$, determinare equazioni parametriche per la retta passante per l'origine e perpendicolare al piano π_1.

2. Sia $\mathcal{C} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, con $v_1 = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2$ e $v_2 = \mathrm{e}_1 - e_2$. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita dalla matrice:
$$M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcolare la dimensione dell'immagine e del nucleo di f. Dire se f è iniettiva, suriettiva, invertibile.
   (b) Scrivere la matrice associata a f nella base $\mathcal{C}$.
   (c) Trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^2$ tali che $f(v) = -v$.

29/11/2007 GEOMETRIA 1 ☐III ESONERO ☐I APPELLO Corso: ☐A&T ☐TLC

COGNOME .... NOME ....

Risolvere gli esercizi negli spazi appositi. Verrà corretto SOLO QUESTO FOGLIO. Motivare le risposte.

3. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice:

$$M(f)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare gli autovalori di f.

(b) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui f è diagonalizzabile.

(c) Per i valori di a trovati al punto precedente, trovare una base $\mathcal{B}$ e una matrice diagonale D tali che $M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = D$.

4. (*Solo I appello*) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi:

$$U = \text{span}\{(2,1,0,-1),(1,3,1,0),(-1,2,1,1)\}, \quad V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

(a) Calcolare la dimensione di U e V.
(b) Trovare una base di $U \cap V$ ed estenderla a una base di $U + V$.
(c) Trovare equazioni cartesiane per $U + V$