Tutorato V (22/04/2002)

(Trasformazioni lineari fratte e mappe conformi)

Esercizio 1.

1. Mostrare che ogni trasformazione lineare fratta che mappa l'asse reale in se stesso, può essere scritta con coefficienti reali.
2. La riflessione $z \to \overline{z}$ è una TLF? Giustificare la risposta

Esercizio 2. Trovare una TLF che mappi:

1. il semipiano $\mathrm{Imz} > 0$ nel cerchio unitario di centro l'origine, in modo che un punto fissato z_0 (con $\mathrm{Imz}_0 > 0$) vada nel centro;
2. il cerchio $|z| = 2$ in $|z+1| = 1$, in modo che $-2 \to 0$ e $0 \to i$;
3. i cerchi $|z| = 1$ e $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ in due cerchi concentrici. Qual è il rapporto tra i raggi?
4. la regione tra i cerchi $|z| = 1$ e $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, nel semipiano $x > 0$. (Attenzione: in questo caso non viene proprio una TLF... andrà composta con qualche funzione elementare nota!)

Esercizio 3. Sia $R(z) = \frac{z+1}{z-1}$ una TLF; descrivere (completamente) l'immagine tramite R delle rette verticali $x = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. (**) Sia f una funzione analitica su $\mathrm{Imz} \geq 0$ tale che

$$\exists \lim_{z \to \infty} f(z) \ < \infty \ .$$

Dimostrare che per ogni z_0 tc $\mathrm{Imz}_0 > 0$ si ha la seguente relazione :

$$f(z_0) = \frac{\mathrm{Imz}_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{|t - z_0|^2}\, dt.$$

(Sugg.: può essere utile ricordarsi la formula di Cauchy su dischi ed aver fatto l'esercizio 2.1).