Tutorato X (27/05/2002)

(Esercizi riepilogativi)

Esercizio 1. Sia n un intero positivo; calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta\ .$$

Esercizio 2. Sia f una funzione analitica su $\mathbb{C}$, e supponiamo che assuma valori reali sull'asse reale e valori immaginari sull'asse immaginario. Dimostrare che f è una funzione dispari (cioè $f(z) = -f(-z)$ per ogni z).

Esercizio 3. Sia g una funzione continua su $[0, 2\pi]$ tale che $g(0) = g(2\pi)$. Rispondere nella maniera più esauriente possibile alle seguenti domande:

(i) Supponiamo che esista una funzione analitica f sul disco unitario chiuso, tale che
$$f(e^{i\theta}) = g(\theta)$$
per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. Quanto vale f nell'origine?

(ii) Esiste almeno una funzione siffatta? In caso affermativo, darne un'espressione esplicita.
Oss: Formalmente il nostro problema si può riscrivere: $f \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0 & \text{se } |z| \le 1 \\ f(z) = g(\operatorname{Arg} z) & \text{se } |z| = 1 \end{cases}$$

(iii) Quante funzioni di questo tipo possono esistere?

(iv) Supponiamo di considerare un generico dominio $\overline{\Omega}$ chiuso e semplicemente connesso. Ammette ancora una soluzione il problema precedente? E' unica? (Ovviamente stiamo supponendo questa volta di conoscere il valore assunto su $\partial\Omega$). Non è richiesta questa volta di darne un'espressione esplicita.

(v) Riflettere su quale proprietà della funzione f abbiamo veramente usato... è necessario che sia analitica? A quale classe di funzioni a valori reali potete estendere tutto ciò? Vi ricorda qualche risultato noto?

Esercizio 4. Sia f una funzione definita nel semipiano superiore Σ^+, con f periodica di periodo 1 (cioé $f(z) = f(z+1)$ per ogni z).

(i) Dimostrare che esiste una funzione g analitica nel disco unitario privato dell'origine (che denoteremo D^*), tale che:

$$g(e^{2\pi iz}) = f(z)$$

per ogni $z \in \Sigma^+$.

(ii) Qual è la serie di Laurent per g? scrivere i coefficienti in forma integrale.

(iii) Dimostrare che la funzione f ha un'espansione della forma

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inz}$$

dove

$$c_n = \int_0^1 f(x+iy)e^{-2\pi in(x+iy)}dx$$

per ogni $y > 0$.