Tutorato VIII (13/05/2002)

(Proprietà locali di mappe olomorfe)

Esercizio 1. (a) Applichiamo il teorema di Rouché con $\gamma = \partial D_1(0)$, e prendiamo $g(z) = 6z^3$. Osserviamo:

- $|g(z)| = 6$ su γ;
- $|P_1(z) - g(z)| \leq 5$ su γ. Quindi dal teorema di Rouché, segue che P_1 e g hanno lo stesso numero di zeri in $D_1(0)$ (contati con molteplicità), e quindi P_1 ha 3 zeri in tale disco.

(b) Cominciamo con vedere quanti zeri ci sono in $D_1(0)$; procediamo come sopra, prendendo $\gamma = \partial D_1(0)$ e $g(z) = -6z$. Si verifica immediatamente che su γ:

$$|P_2(z) - g(z)| \leq 4 < 6 = |g(z)|$$

e quindi dal teorema di Rouché segue che P_2 ha esattamente uno zero in tale disco.

Vediamo cosa possiamodire sugli zeri in $D_2(0)$; prendiamo $\gamma = \partial D_2(0)$ e $g(z) = z^4$. Si verifica facilmente che

$$|P_2(z) - g(z)| \leq 15 < 16 = |g(z)|$$

e quindi dal teorema di Rouché segue che la funzione ha esattamente 4 zeri in tale disco.

Concludendo: P_2 ha tre zeri nell'anello $1 \leq |z| < 2$.

(c) Consideriamo la curva γ_R nel primo quadrante, consistente degli intervalli $[0, R]$, $[0, iR]$ e l'arco di circonferenza di centro 0 e raggio R, congiungente i punti R e iR. E' sufficiente mostrare che per R sufficientemente grande il nostro polinomio ha esattamente uno zero all'interno di γ_R. Applichiamo il teorema di Rouché prendendo come funzione $g(z) = z^4 + 1$ che ha esattamente uno zero interno a γ_R. Ci rimane da controllare che $|P_3(z) - g(z)| \leq |g(z)|$ per $z \in \gamma_R$; infatti:

– $|P_3(x) - g(x)| = |x|^3 < x^4 + 1 = |g(x)|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

– $|P_3(iy) - g(iy)| = |y|^3 < y^4 + 1 = |g(iy)|$ per ogni $y \in \mathbb{R}$;

– $|P_3(z) - g(z)| = |z|^3 = R^3 < R^4 - 1 \leq |g(z)|$ per $|z| = R$ (con $R \geq 2$ in modo che $R^4 - 1 > 2R^3 - R^3 = R^3$).

Esercizio 2. Cominciamo col dimostrare il suggerimento: il nostro polinomio ha esattamente n radici contate con la loro molteplicità, quindi lo possiamo fattorizzare: $(z-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_n)$, da cui si vede che il termine noto del polinomio, corrisponde esattamente al prodotto delle radici (cambiate di segno), da cui segue l'affermazione del suggerimento.
Nel nostro caso (non sappiamo niente sul grado del polinomio, quindi avremmo un'indeterminazione nel segno del prodotto delle radici!) il prodotto delle radici di $P(x)$ (contate con molteplicità) è uguale a ± 1. Poiché non ci sono radici all'interno del disco unitario, segue che non ci possono stare nemmeno fuori dal disco (altrimenti il prodotto non potrebbe dare 1 in modulo); quindi tutte le radici si trovano sul cerchio $|z| = 1$. Inoltre sappiamo che $P(0) = -1 < 0$ e che $\lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty$ (in quanto il coefficiente direttore del polinomio è positivo), e quindi per continuità, deve esistere una radice sul semiasse reale positivo. Quindi necessariamente $P(1) = 0$.

Esercizio 3. Supponiamo per assurdo che f non sia identicamente nulla e che abbia più di m zeri in Ω, e sia Ω' una sottoregione compatta di Ω con bordo rappresentato da una curva semplice (cioè ogni punto interno, ha indice 1 rispetto a tale curva), e supponiamo che Ω' contenga $l > m$ zeri di f. Applichiamo il principio dell'argomento (usando il fatto che la successione converge uniformemente su Ω'):

$$\begin{aligned} m < l &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega'} \frac{f'}{f}\,dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega'} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n'}{f_n}\,dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\oint_{\partial\Omega'} \frac{f_n'}{f_n}\,dz \leq m \end{aligned}$$

che è una chiara contraddizione!

Esercizio 4. Possiamo assumere senza alcuna perdita di generalità che $f(0) = 0$ (altrimenti applico quando segue alla funzione $g(z) = f(z) - f(0)$). Poichè $f'(0) \neq 0$ ed f è analitica in un intorno di 0, segue che la mia funzione la posso rappresentare nella forma $f(z) = zf_1(z)$ con $f_1'(0) \neq 0$.
Definiamo ora $f_2(z) = f_1(z^n)$, ed osserviamo che esiste un intorno $D_\rho(0)$ tale che $f_2(z) \neq 0$ in ogni punto di tale intorno; in tale intorno (semplicemente connesso) posso definire una determinazione analitica di $\log f_2$ e quindi di

$\sqrt[n]{f_2(z)} =: h(z)$ (e quindi $h(z)^n = f_2(z)$ in tale intorno dell'origine).
Concludendo, per ogni $z \in D_\rho(0)$ si ha:

$$f(z^n) = z^n f_1(z^n) = z^n f_2(z) = (zh(z))^n =: g(z)^n$$

con g analitica in tale insieme; e questo conclude la dimostrazione.