Tutorato VII (06/05/2002)
(Calcolo di integrali definiti)

Esercizio 1. 1. Consideriamo la sostituzione (per $|z| = 1$):

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) .$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \\
&= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz\,(iz)^{-1}}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \\
&= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}
\end{aligned}$$

La funzione integranda ha poli semplici in $\alpha_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, e calcolando i relativi residui, otteniamo:

$$\mathrm{Res}_{\alpha_+} = \frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} = -\mathrm{Res}_{\alpha_-} .$$

Applichiamo il teorema dei residui, ricordandoci che l'unico polo contenuto all'interno del disco unitario è α_+, quindi:

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} .$$

2. Cominciamo con l'osservare che la funzione $\sin^2 z$ assume su $(0, \frac{\pi}{2})$ gli stessi valori che assume su $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ed inoltre è periodica di periodo π sull'asse reale. Quindi possiamo riscrivere il nostro integrale (procediamo esattamente come sopra):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin^2 x} &= \frac{1}{4}\oint_{|z|=1} \frac{dz\,(iz)^{-1}}{a + \left[\frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right]^2} \\
&= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{-z\,dz}{z^4 - (4a + 2)z^2 + 1}
\end{aligned}$$

Calcoliamone i poli: sono in $\pm\sqrt{\beta_{\pm}}$, dove $\beta_{\pm} = (2a+1) \pm \sqrt{(2a+1)^2 - 1}$. Vediamo quali stanno all'interno del disco unitario (indichiamo le quattro soluzioni $\alpha_{++}, \alpha_{+-}, \alpha_{-+}, \alpha_{--}$):

- se $a > 0$: devo scegliere quelle associate a β_- (cioè α_{-+} e α_{--}).
  In questo caso otteniamo:

  $$\mathrm{Res}_{\alpha_{-+}} = \frac{\alpha_{-+}}{(\beta_- - \beta_+)(\alpha_{-+} - \alpha_{--})} \quad \text{e} \quad \mathrm{Res}_{\alpha_{--}} = \frac{\alpha_{--}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{--} - \alpha_{-+})} \ .$$

  Otteniamo quindi il valore integrale (usando teo residui):

  $$= \frac{\pi}{\sqrt{(2a+1)^2 - 1}} \ .$$

- se $a < 0$: devo scegliere quelle associate a β_+ (cioè α_{++} e α_{+-}).
  In questo caso otteniamo:

  $$\mathrm{Res}_{\alpha_{++}} = \frac{\alpha_{++}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{++} - \alpha_{+-})} \quad \text{e} \quad \mathrm{Res}_{\alpha_{+-}} = \frac{\alpha_{++}}{(\beta_+ - \beta_-)(\alpha_{+-} - \alpha_{++})} \ .$$

  Otteniamo quindi il valore integrale (usando teo residui):

  $$= \frac{-\pi}{\sqrt{(2a+1)^2 - 1}} \ .$$

Quindi riassumendo il valore dell'integrale viene:

$$\frac{\mathrm{sgn}(a)\,\pi}{\sqrt{(2a+1)^2 - 1}} \ .$$

3. Integriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}$ sul cammino:

   $$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R,\ \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\} \ .$$

   Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito.
   La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm i\sqrt{2}$ e $z = \pm i\sqrt{3}$; naturalmente noi considereremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che sono contenuti all'interno del nostro cammino. Calcoliamone i residui:

   $$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}_{\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \ .$$

   Applicando il teorema dei residui otteniamo:

   $$\oint_{\gamma_R} f\,dz = \int_{C_R} f\,dz + \int_{\sigma_R} f\,dz \ = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \ .$$

Vediamo cosa succede quando passo al limite per $R \to \infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z^2}{z^4+5z^2+6}\, dz \right| &\leq \int_{C_R} \frac{R^2}{|z^4+5z^2+6|}\, |dz| \leq \\ &\leq \int_{C_R} \frac{R^2}{R^4-5R^2-6}\, |dz| = \\ &= \pi R \frac{R^2}{R^4-5R^2-6} \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;; \end{aligned}$$

mentre:

$$\int_{\sigma_R} f(z)\, dz \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\, dx \;.$$

Quindi:

$$\pi(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

da cui:

$$\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\, dx \;.$$

4. Integriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}$ sul cammino:

$$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R,\ \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\} \;.$$

Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito.
La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm 3i$ e $z = \pm 2i$; naturalmente noi considereremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che sono contenuti all'interno del nostro cammino.
Calcoliamone i residui:

$$\mathrm{Res}_{3\mathrm{i}} = \frac{7+3\mathrm{i}}{48\mathrm{i}} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Res}_{2\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{16\mathrm{i}} \;.$$

Applicando il teorema dei residui otteniamo:

$$\oint_{\gamma_R} f\, dz = \int_{C_R} f\, dz + \int_{\sigma_R} f\, dz = \frac{5\pi}{12} \;.$$

Vediamo cosa succede quando passo al limite per $R \to \infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}\, dz \right| &\leq \int_{C_R} \frac{R^2+R+2}{|z^4+10z^2+9|}\, |dz| \leq \\ &\leq \int_{C_R} \frac{R^2+R+2}{R^4-10R^2-9}\, |dz| = \\ &= \pi R \frac{R^2+R+2}{R^4-10R^2-9} \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;; \end{aligned}$$

mentre:
$$\int_{\sigma_R} f(z)\, dz \ \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx \ .$$
Quindi:
$$\frac{5\pi}{12} \ = \ \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\, dz \ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$
da cui:
$$\frac{5\pi}{12} = \int_0^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx \ .$$

5. Oss: Dobbiamo supporre $a \neq 0$ in quanto altrimenti la funzione non è più integrabile (perchè?).
   Integriamo la funzione $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}$ sul cammino:
$$\gamma_R = C_R \cup \sigma_R = \{|z| = R, \ \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\} \ .$$
   Studieremo il comportamento di tale integrale quando R tende ad infinito.
   La funzion $f(z)$ ha poli in $z = \pm i|a|$; naturalmente noi consideremo solo quelli nel semipiano superiore, e prendendo R molto grande possiamo assumere che sono contenuti all'interno del nostro cammino. Calcoliamone i residui:
$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i|a|}} = \frac{4\mathrm{a}^2}{2^6|\mathrm{a}|^5\mathrm{i}} \ .$$
   Applicando il teorema dei residui e procedendo esattamente come nei due integrali precendenti (le stime sono esattamente le stesse), arriviamo alla conclusione:
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\, dx \ = \ \frac{1}{16|a|^3} \ .$$

6. Ovviamente dobbiamo supporre $a \neq 0$ altrimenti la funzione non è integrabile in 0. Applichiamo il teorema dei residui alla funzione
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}$$
   ed integriamola sul cammino γ_R definito come nel punto precedente. La funzione ha poli in $z = \pm i|a|$, quindi l'unico polo che si trova all'interno

del nostro cammino (quando R è sufficientemente grande) è $z = i|a|$, e il suo residuo:

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i|a|}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{|a|}}}{2\mathrm{i|a|}} \; .$$

Osserviamo ora i seguenti fatti:

- $$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \frac{\pi}{|a|} \; .$$

- $$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz \right| &\leq \frac{1}{R^2-a^2} \int_{C_r} |e^{iz}|\, |dz| \leq \\ &\leq \frac{\pi R}{R^2-a^2} \xrightarrow{R\to 0} 0 \; . \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx \; + \; i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx \; . \end{aligned}$$

  dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disparità della funzione integranda.
  Possiamo quindi concludere:

  $$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2|a|} e^{-|a|} \; .$$

7. Consideriamo in $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = iy \;\mid\; y \leq 0\}$ consideriamo la determinazione analitica del logaritmo $\log z$ tale che: $\log 1 = 0$ e $\log(-1) = i\pi$. Applichiamo il teorema dei residui alla funzione $f(z) = \frac{\log z}{1+z^2}$ analitica in $\Omega \setminus \{i\}$; quindi la nostra funzione ha un polo in $z = i$ e residuo $\mathrm{Res_i} = \frac{\log \mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \frac{\pi}{4}$. Scegliamo come cammino di integrazione:

$$\begin{aligned} \gamma_{R,\epsilon} &= C_R \cup C_\epsilon \cup \sigma_+ \cup \sigma_- = \{|z| = R,\; \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \\ &\cup \;\; \{|z| = \epsilon,\; \mathrm{Imz} \geq 0\} \cup \{-\mathrm{R} \leq \mathrm{x} \leq -\epsilon\} \cup \{\epsilon \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{R}\} \; . \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2 i}{2} &= \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\gamma_{R,\epsilon}} f(z)\, dz = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{\log|x| + i\pi}{1+x^2}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx = \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx + i\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx + i\frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx = 0 \, .$$

Osserviamo che nel calcolo dell'integrale abbiamo stimato (in maniera molto semplice) che gli integrali lungo le due semicirconferenze di raggio R e ϵ, danno un contributo nullo nel passaggio al limite.

8. Suggerimento: integrare prima per parti e poi distinguere i casi: $0 < \alpha \leq 1$ e $1 < \alpha < 2$.
Il risultato viene:

$$\frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2}} \, .$$