Tutorato X (27/05/2002)

(Esercizi riepilogativi)

Esercizio 1. Scriviamoci questo integrale, come integrale lungo la circonferenza unitaria, usando la sostituzione $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, valida per $|z| = 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta &= \frac{1}{2^{2n}} \int_{S^1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz = \\ &= \frac{1}{i2^{2n}} \int_{S^1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\, dz\ . \end{aligned}$$

La funzione integranda ha in 0 un polo di ordine $2n+1$, quindi avremmo che:

$$\mathrm{Res}_0 = \frac{\mathrm{D}_\mathrm{z}^{2\mathrm{n}}(\mathrm{z}^2+1)^{2\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}!}_{|\mathrm{z}=0}\ .$$

Per calcolarci tale residuo, osserviamo il seguente fatto:

$$(1+z^2)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} z^{2j}$$

e quindi

$$\mathrm{Res}_0 = \binom{2n}{n}\ .$$

Applicando il teorema dei residui:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta &= \ldots = \frac{1}{i2^{2n}} \int_{S^1} \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\, dz = \\ &= \frac{2\pi i}{2^{2n} i} = \binom{2n}{n} = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \end{aligned}$$

come si verifica facilmente sviluppando i fattoriali.

Esercizio 2. Denotiamo con f_+ la nostra funzione ristretta al semipiano superiore; usando il principio di riflessione di Schwarz segue (poiché assume valori reali su asse reale) che

$$f_+(z) = \overline{f_+(\overline{z})}\ ;$$

da ciò segue abbastanza facilmente che $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. (Basta infatti osservare che la funzione sopra definita coincide con f su un insieme

con parte interna... e quindi devono coincidere dappertutto!).
Ora usiamoil fatto che assume valori immaginari su asse immaginario: definisco una nuova funzione

$$g(z) = if(iz)$$

che sarà ancora analitica su tutto $\mathbb{C}$ e inoltre assumerà valori reali su asse reale. Quindi posso applicare quanto detto sopra all nuova funzione g e concludere che per ogni z:

$$if(iz) = g(z) = \overline{g(\overline{z})} = -i\overline{f(i\overline{z})} \; .$$

Mettendo insieme i vari risultati:

$$f(iz) = -\overline{f(i\overline{z})} = -\overline{f(\overline{-iz})} = -f(-iz)$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 3. (i) La funzione f soddisfa il teorema di cauchy (in quanto analitica) quindi:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} \frac{f(z}{z} \, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \, d\theta \; ; \end{aligned}$$

questa proprietà è anche detta *Proprietà del Valor medio* (infatti, il valore al centro è dato dal valore medio dei valori che assume su una qualsiasi circonferenza di centro l'origine, e contenuta all'interno del dominio di analiticità).

(ii) La risposta è affermativa! Diamo ora una rappresentazione integrale di tale funzione.
(IDEA: Vogliamo utilizzare la proprietà del valore medio, per trovare il valore della funzione in un generico punto z_0 interno al cerchio unitario. Cercheremo una trasformazione lineare fratta che mappi il disco unitario in se stesso, in modo da mandare il punto z_0 nel centro...)
Sia quindi z_0 tale che $|z_0| < 1$; la TFL che mappa il disco unitario in se stesso, mandando z_0 in 0, è data da

$$S(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}} \; .$$

Definiamo la nuova funzione $g = f \circ S^{-1}$: è ancora analitica sul disco unitario chiuso, quindi posso applicare il teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= g(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} \frac{f \circ S^{-1}(z)}{z} \, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{S^1} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1 - |z_0|^2}{|\xi - z_0|^2} \, d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \frac{1 - |z_0|^2}{|e^{i\theta} - z_0|^2} \, d\theta \end{aligned}$$

dove il termine $\frac{1-|z_0|^2}{|e^{i\theta}-z_0|^2}$ è detto *Nucleo di Poisson*. Abbiamo definito una funzione analitica nel disco unitario, che soddisfa il problema al contorno assegnato (un problema di questa forma è detto *Problema di Dirichlet*.

(iii) Chiaramente la soluzione è unica. Infatti l'unicità segue proprio da come l'abbiamo costruita, usando cioè la proprietà del valore medio... l'unicità si può anche vedere da un altro punto di vista: supponiamo che ne esistano due: allora avremmo trovato due funzioni analitiche che coincidono su un insieme che ha punti di accumulazioni... e quindi devono coincidere dappertutto!

(iv) Nel caso di un generico dominio $\overline{\Omega}$ chiuso e semplicemente connesso, per il teorema della mappa di Riemann riesco a trovare un diffeomorfismo analitico che mi mappi tale dominio nel cerchi unitario. Ragionando come sopra si ottiene l'esistenza di una soluzione anche in questo caso. Nota: Forse dovremmo discutere meglio cosa succede al bordo... questo non è un problema molto semplice, e bisognerebbe sviluppare una teoria topologica abbastanza complicata (Teoria di Caratheodory) e introdurre il concetto di *Prime ends*. Per chi volesse approfondire questo punto di vista, può consultare le note "Complex Dynamical Systems", John Milnor (scaricabili dal sito web dell'università SUNY at Stony Brook).

(v) La proprietà fondamentale che abbiamo usato è la proprietà del valore medio!! Quindi questo ragionamento si potrebbe applicare a qualsiasi funzione che goda di tale proprietà. Un caso interessante è il caso delle funzioni armoniche... quanto abbiamo detto, altri non è se non la dimostrazione dell'esistenza di soluzioni del problema di Poisson per funzioni armoniche, su domini semplicemente connessi.

Esercizio 4. (i) Basta prendere la seguente funzione:

$$g(z) = f(\frac{1}{2\pi i}\log z) \ .$$

osserviamo che nonostante non sia possibile definire in tale dominio una determinazione analitica del logaritmo, la composizione di queste due funzioni è analitica su D^*: infatti la $1-$ periodicità della f, elimina ogni eventuale problema derivante dall'argomento del logaritmo! (naturalmente si può fare una discussione molto più formale di tutto ciò...) Proprio per come è stata costruita si ha:

$$g(e^{2\pi i z}) = f(z)$$

per ogni $z \in \Sigma^+$.

(ii) La serie di Laurent per gè data da:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

dove:

$$c_n \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}$$

con $0 < r < 1$.

(iii) Basta semplicemente calcolare la serie di L. della g nei punti $e^{2\pi i z}$, per ogni $z \in \Sigma^+$ e applicare quanto visto nel punto (i).