1. Calcolare
$$\int_\gamma 5z^4 - z^3 + 2dz,$$
dove $\gamma = S^1(0,1) = \{re^{i\theta},\ \theta \in [0,2\pi]\}$, la circonferenza di centro 0 e raggio 1, oppure γ è il quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$, oppure γ è il segmento di estremi $0, 1+i$.

La funzione $f(z) = 5z^4 - z^3 + 2$ è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$. Gli integrali di f sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1, e sul quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$ sono entrambi nulli. Il segmento di estremi $0, 1+i$ è dato da $\gamma(t) = t(1+i),\ t \in [0,1]$. Inoltre $\gamma'(t) = (1+i),\ t \in [0,1]$.

$$\int_\gamma 5z^4 - z^3 + 2dz = \int_0^1 5(1+i)^5 t^4 - (1+i)^4 t^3 + 2(1+i)dt = \ldots = (1+i)^5 - (1+i)^4/4 + 2(1+i).$$

1. Calcolare
$$\int_\gamma \bar{z} + z^2 \bar{z} dz,$$
dove $\gamma = S^1(0,r) = \{re^{i\theta},\ \theta \in [0,2\pi]\}$, la circonferenza di centro 0 e raggio $r > 0$.

La curva di integrazione è $\gamma(t) = re^{it},\ t \in [0,2\pi]$. Inoltre $\gamma'(t) = ire^{it}$.

$$\int_\gamma \bar{z} + z^2 \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} (re^{-it} + r^3 re^{2it} re^{-it}) ire^{it} dt = \ldots = r^2 2\pi i.$$

2. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{1}{z+2} dz,$$
dove $\gamma = S^1(0,5) = \{5e^{-i\theta},\ \theta \in [0,2\pi]\}$.

Applichiamo la formula integrale di Cauchy alla funzione $f(z) \equiv 1$, tenendo conto che la curva γ è percorsa in senso orario:
$$\int_\gamma \frac{1}{z+2} dz = -2\pi i f(-2) = -2\pi i.$$

3. Calcolare
$$\int_\gamma z(z+4)dz,$$
dove $\gamma = \{2e^{-i\theta},\ \theta \in [0,\pi]\}$.

La funzione f è olomorfa su tutto $\mathbf{C}$. Per il teorema di Cauchy, l'integrale di f sulla semicirconferenza γ (percorsa in senso orario), è uguale all'integrale di f sull'intervallo $[-2,2]$

$$\int_\gamma z(z+4)dz = \int_{-2}^2 x^2 + 4x dx = \ldots = 16/3.$$

4. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^{38}} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0,1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Dalla formula integrale di Cauchy applicata alla funzione $f(z) = \sin z$,

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^{38}} dz = \frac{2\pi i}{37!} \sin^{(37)}(0) = \ldots = \frac{2\pi i}{37!} \cos(0) = \frac{2\pi i}{37!}.$$

5. Calcolare

$$\int_\gamma (\frac{z-2}{2z-1})^3 dz,$$

dove $\gamma = S^1(0,1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Scriviamo $(\frac{z-2}{2z-1})^3 = \frac{1}{8}\frac{(z-2)^3}{(z-1/2)^3}$ e applichiamo la formula integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = (z-2)^3/8$:

$$\int_\gamma (\frac{z-2}{2z-1})^3 dz = \frac{2\pi i}{2} f^{(2)}(1/2) = \ldots = \pi i(-9/8).$$

(la derivata seconda è data da $f^{(2)}(z) = \frac{3}{2}(z/2-1)$).

6. Siano $|a| < 1 < |b|$. Per $n, m \in \mathbf{Z}$, calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0,1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

(questo era il testo esatto dell'esercizio)
$\forall n \leq 0,\ m \in \mathbf{Z}$: la funzione $f(z) = \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}$ è olomorfa all'interno di γ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n} dz = 0.$$

$\forall n \geq 1,\ m \in \mathbf{Z}$ la funzione $f(z) = (z-b)^m$ è olomorfa all'interno di γ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n} dz = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

7. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz, \qquad \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1/2)^2} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0,1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Applichiamo la formula integrale di Cauchy alla funzione $f(z) = e^z$:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1/2)^2} dz = \frac{2\pi i}{2} f'(1/2) = \pi i \sqrt{e}.$$

8. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz,$$

dove $\gamma = S^1(0,4) = \{4e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Scriviamo $\frac{1}{(z-1)(z-2i)} = \frac{1}{5}(\frac{1+2i}{(z-1)} - \frac{1+2i}{(z-2i)})$. Osserviamo che $z = 1$ e $z = 2i$ si trovano all'interno del disco delimitato da γ. Applicando la formula di Cauchy alla funzione $f(z) \equiv 1$, troviamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz = \int_\gamma \frac{1+2i}{5} \frac{1}{(z-1)} dz - \int_\gamma \frac{1+2i}{5} \frac{1}{(z-2i)} = f(1) - f(2i) = 0.$$

Alternativamente:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve chiuse che racchiudono rispettivamente $z = 2i$ e $z = 1$ (ottenute dividendo γ in due parti e chiudendo le semicirconferenze ottenute con una corda, percorsa una volta in un senso e una volta in senso contrario...). Applicando la formula di Cauchy alle funzioni $f_1(z) = \frac{1}{(z-1)}$, olomorfa all'interno di γ_1, e $f_2(z) = \frac{1}{(z-2i)}$, olomorfa all'interno di γ_2, troviamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{(z-1)(z-2i)} dz = f_1(2i) + f_2(1) = \frac{1}{(2i-1)} + \frac{1}{(1-2i)} = 0.$$

In questo caso abbiamo usato il fatto (citato, ma non dimostrato) che $\int_\sigma f(z)dz = \int_\tau f(z)dz$, se σ e τ sono curve chiuse omologhe.

9. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^2+z}{(z+3)(z-2i)} dz,$$

dove $\gamma = S^1(1,5) = \{1 + 5e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Scriviamo $z^2 + z = (z+3)(z-2i) + (2i-2)z + 6i$ e

$$\frac{z^2+z}{(z+3)(z-2i)} = 1 + \frac{(2i-2)z + 6i}{(z+3)(z-2i)} = 1 + \frac{1}{13}(\frac{-18+12i}{z+3} + \frac{-8+14i}{z-2i}).$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^2+z}{(z+3)(z-2i)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma 1 dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{13}(\frac{-18+12i}{z+3}) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{13}(\frac{-8+14i}{z-2i}) dz$$

$$= \ldots = 0 + \frac{1}{13}(-18 + 12i + -8 + 14i) = -2 + 2i.$$

(Osservando che i punti $z = -3$ e $z = 2i$ stanno all'interno della circonferenza γ e usando la formula di Cauchy, come nell'esercizio precedente). Alternativamente: come nell'esercizio precedente, si puo' spezzare la curva γ in modo da applicare la formula di Cauchy alle funzioni $f_1(z) = \frac{z^2+z}{(z-2i)}$ e $f_2(z) = \frac{z^2+z}{(z+3)}$. In questo modo si trova

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2+z}{(z+3)(z-2i)}dz = f_1(-3) + f_2(2i) = -2 + 2i.$$

10. Siano $\gamma_1 = S^1(0,1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$, e $\gamma_2 = S^1(0,3) = \{3e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2-2}{z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2-2}{z}dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz$$

La funzione $f(z) = \frac{z^2+5z}{(z-2)}$ è olomorfa all'interno di γ_1, mentre $g(z) = z^2 + 5z$ è olomorfa all'interno di γ_2:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz = 0 + g(2) = 14$$

La funzione $g(z) = z^2 - 2$ è olomorfa all'interno di γ_1 e all'interno di γ_2:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2-2}{z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2-2}{z}dz = g(0) - g(0) = 0.$$

La funzione $f(z) = \frac{z^3-3z-6}{(z+2)(z+4)}$ è olomorfa all'interno di γ_1, quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz = f(0) = -3/4.$$

Scriviamo $\frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)} = \frac{(3/4)}{z} + \frac{(-2)}{z+2} + \frac{(25/4)}{z+4}$, e osserviamo che $z = 0$ e $z = -2$ si trovano all'interno di γ_2, mentre $z = -4$ si trova all'esterno.

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{(3/4)}{z} + \frac{(-2)}{z+2} + \frac{(25/4)}{z+4}dz = -(3/4 - 2 + 0) = 5/4.$$

In totale, l'integrale richiesto è uguale a $1/2$.

11. Sia $\gamma = S^1(0,1) = \{e^{-i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$. Per ogni numero reale λ, dare un esempio di una funzione olomorfa non costante sull'anello $A = \{1/2 < |z| < 2\}$ tale che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) dz = \lambda.$$

Consideriamo la funzione $F(z) = -\lambda/z$: è olomorfa e non costante sull'anello A. Inoltre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(z) dz = \lambda.$$

(γ è percorsa in senso orario).

12. Sia $f = u + iv$ una funzione olomorfa su un disco. Fare vedere che $(u, -v) = gradF$ e $(v, u) = gradG$, dove F e G sono funzioni armoniche coniugate.

Per ogni curva chiusa γ contenuta nel disco

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \int_\gamma u dx - v dy = 0 \\ \int_\gamma v dx + u dy = 0. \end{cases}$$

Segue che esistono $F, G\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, tali che $\mathrm{grad} F = (u, -v)$ e $\mathrm{grad} G = (v, u)$. Poiché u, v soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann F e G sono armoniche:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F = \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y}(-v) = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} G + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G = \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial y}(u) = 0.$$

Sono inoltre armoniche coniugate:

$$\frac{\partial}{\partial x} F = \frac{\partial}{\partial y} G = u, \qquad \frac{\partial}{\partial y} F = -\frac{\partial}{\partial x} G = -v.$$