

1. Numeri complessi.

1. Siano $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$.

- (i) Calcolare $(z - w)^2$, $2z^2 + 1/w$, $z^{-1} + \bar{w}$, $|z + 3w|^2$. Dare la risposta nella forma $a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.
- (ii) Calcolare la parte reale "Re" e la parte immaginaria "Im" di zw , z^{-1} e \bar{w}^2 .
- (iii) Calcolare $\text{Arg}(z)$, $\text{Arg}(zw)$ ed $\text{Arg}(z^2)$.

2. Sia

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

- (i) Calcolare $\text{Arg}(z)$, $|z|$, z^2 e z^3 .
- (ii) Calcolare $z^2 - z + 1$.

3. Determinare i numeri complessi (fare un disegno) tali che

- (i) $z = -\bar{z}$,
- (ii) $\text{Arg}(z) = 0$,
- (iii) $|z| = 2$,
- (iv) $|z| = \bar{z}$.

4. Dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}\cos(5\varphi) &= \cos^5(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\text{sen}^2(\varphi) + 5\cos(\varphi)\text{sen}^4(\varphi), \\ \text{sen}(5\varphi) &= 5\cos^4(\varphi)\text{sen}(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\text{sen}^3(\varphi) + \text{sen}^5(\varphi).\end{aligned}$$

7. Sia $z \in \mathbf{C}$.

- (i) Far vedere che $\text{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$ e $\text{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i$.

Supponiamo adesso che $z \neq 0$.

- (ii) Calcolare $|z/\bar{z}|$.
- (iii) Sia $\varphi = \text{Arg}(z)$. Chi è l'argomento di $1/z$? E di z/\bar{z} ?